

Devoir surveillé n°3 — piste carmin

samedi 8 novembre de 8h07 à 12h07

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

1. Questions de cours	1
2. Intégrales de Wallis et de Gauß	1
3. Groupe orthogonal	2
4. Lemme de Riemann-Lebesgue	3
5. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani	4

1. Questions de cours

- Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et calculer sa valeur.
- Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente, mais non absolument convergente.

Dans la suite de cette partie, (E, N_E) désigne un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé et A une partie compacte de E .

- Démontrer que la partie A est fermée et bornée.
- Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ une suite qui possède une unique valeur d'adhérence. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
- Soient (F, N_F) un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application continue. Démontrer que $f(A)$ est compacte.

2. Intégrales de Wallis et de Gauß

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt.$$

On se propose de déterminer un équivalent de W_n , quand n tend vers $+\infty$.

- Établir pour $n \in \mathbf{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n .
- En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

- Démontrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante et qu'elle converge.
- Déterminer la limite de la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et donner un équivalent de cette suite.

On se propose de démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

10. Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx .$$

11. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout réel x vérifiant $0 \leq x \leq \sqrt{n}$:

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} .$$

12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la question précédente :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2} dt .$$

On pourra considérer les changements de variables $x = \sqrt{n} \cos(t)$ et $x = \frac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$.

13. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

3. Groupe orthogonal

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère :

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A \times A^\top = I_n\} \quad \text{et} \quad \mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) : \det(A) = 1\} .$$

14. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

15. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.

16. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs.

17. Démontrer que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ est compact.

18. On admet que :

$$\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbf{R} \right\} .$$

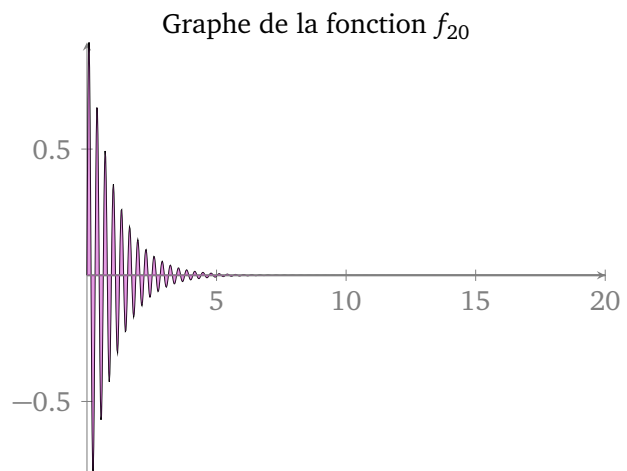
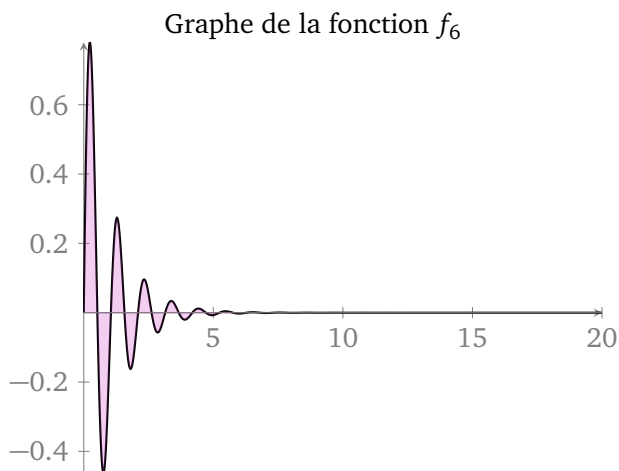
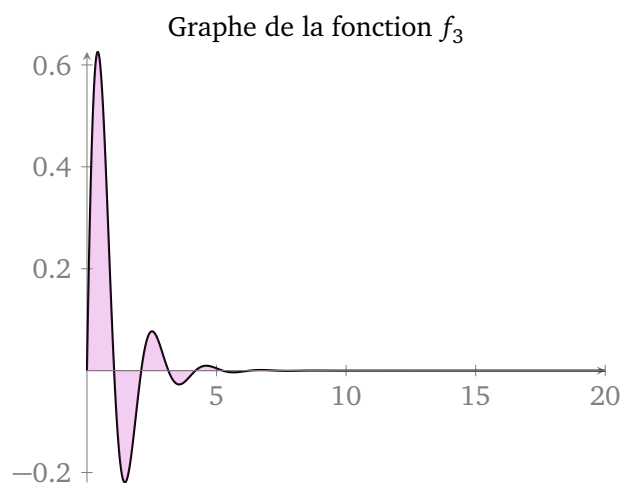
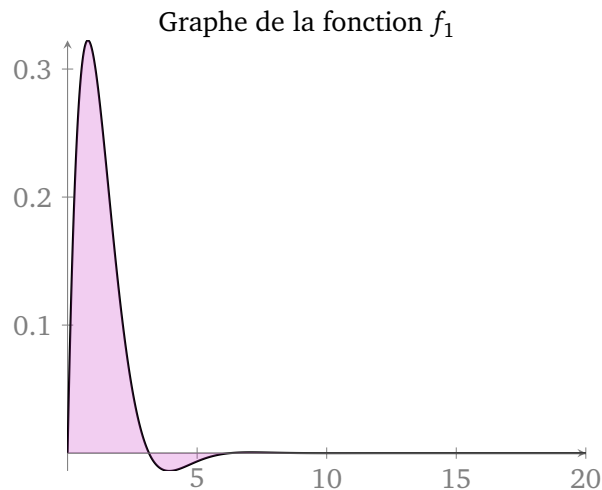
Démontrer que $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

4. Lemme de Riemann-Lebesgue

Nous nous proposons de démontrer :

$$\forall f \in L^1([0, +\infty[, \mathbf{R}) \quad \int_0^{+\infty} f(t) \sin(nt) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad [\text{lemme de Riemann-Lebesgue}]$$

Ce résultat peut s'interpréter comme un phénomène asymptotique de compensation d'aires algébriques, que nous illustrons ci-dessous, en considérant quelques fonctions $f_n: t \mapsto e^{-t} \sin(nt)$, où $n \in \mathbf{N}^*$.



Soient a et b des réels tels que $a < b$. On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, $\mathcal{CM}([a, b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$. Enfin, $L^1([0, +\infty[, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, intégrables sur $[0, +\infty[$.

19. Démontrer que :

$$\forall f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R}) \quad \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

20. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Démontrer, à l'aide du théorème de Heine, que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R}) \quad \|f - \varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon.$$

21. Démontrer alors que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}) \quad \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

puis :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbf{R}) \quad \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

22. Démontrer enfin que :

$$\forall f \in L^1([0, +\infty[, \mathbf{R}) \quad \int_0^{+\infty} f(t) \sin(nt) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

5. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme euclidienne est notée $\| \cdot \|$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E .

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \dots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \text{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, \dots, a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dont la somme est égale à 1, on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \in C$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$.

23. Démontrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E . On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r .

24. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$.

On pourra raisonner par l'absurde.

On considère une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ouverts de E , I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

25. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i . (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}.$$

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide, i.e. $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

26. Montrer qu'il existe une sous famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset$.

Pour toute la suite du problème, nous admettons le :

Théorème. — Toute application linéaire entre deux **R**-espaces vectoriels de dimension finie est continue.

qui sera démontré la semaine prochaine en classe.

Ce résultat nous permet en outre de justifier que l'application :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ u & \longmapsto & \sup_{x \in B(0_E, 1)} \|u(x)\| \end{array} \right.$$

est bien définie. Nous admettons qu'il s'agit d'une norme et nous munissons $\mathcal{L}(E)$ de celle-ci.

Soient G un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}(E)$ et, pour tout $x \in E$, $N_G(x) := \sup_{u \in G} \|u(x)\|$.

27. Montrer que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E .

28. Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :

- pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
- pour tous $x, y \in E$ avec x non nul, $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

Pour la deuxième propriété, on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $\|u(z)\|$ est continue.

Soit K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E . On considère un élément $u \in \mathcal{L}(E)$, et on suppose que K est stable par u , c'est à dire que $u(K)$ est inclus dans K . Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le réel $\delta(K) = \sup_{x, y \in K} \|x - y\|$, qui est bien défini car K est borné.

29. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K . Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leq \frac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u .

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G . Soit $r \geq 1$ un entier, $u_1, u_2, \dots, u_r$ des éléments de G et $u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i$.

30. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

31. Montrer que $N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a :

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a)\right).$$

32. En déduire, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.
33. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \dots, r\}$.
34. En utilisant le résultat de la question 26, démontrer qu'il existe $a \in K$ tel que, pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

Nous avons ainsi démontré le théorème de Markov-Kakutani.



Andreï Markov (1856-1922)

Théorème. — Soient E est un espace euclidien, G un sous-groupe compact de $\mathcal{L}(E)$ et K une partie de E qui est non vide, convexe et stable par tous les éléments de G . Alors il existe $x \in K$ tel que, pour tout $u \in G$, $u(x) = x$.



Shizuo Kakutani (1911-2004)