

Un corrigé du devoir surveillé n°3 — piste bleue

1. Questions de cours	1
2. Intégrales de Wallis et de Gauß	1
3. Groupe orthogonal	5
4. Toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes	7
5. Fonction dilogarithme	10

1. Questions de cours

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) \, dt$ converge et calculer sa valeur.
2. Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt$ est convergente, mais non absolument convergente.

Dans la suite de cette partie, (E, N_E) désigne un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé et A une partie compacte de E .

3. Démontrer que la partie A est fermée et bornée.
4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ une suite qui possède une unique valeur d'adhérence. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
5. Soient (F, N_F) un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application continue. Démontrer que $f(A)$ est compacte.

2. Intégrales de Wallis et de Gauß

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, dt.$$

On se propose de déterminer un équivalent de W_n , quand n tend vers $+\infty$.

6. Établir pour $n \in \mathbf{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n .

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t) (\sin(t))^{n+1} \, dt.$$

Les fonctions :

$$t \mapsto -\cos(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto (\sin(t))^{n+1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par intégration par parties, il vient :

$$W_{n+2} = \underbrace{\left[-\cos(t) (\sin(t))^{n+1}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2(t)}_{=1-\sin^2(t)} (\sin(t))^n \, dt = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

et ainsi :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(n+2) W_{n+1} W_{n+2} = (n+1) W_n W_{n+1} .$$

La suite $((n+1) W_n W_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est donc constante. Comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, nous en déduisons :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2} .$$

8. Démontrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante et qu'elle converge.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Par linéarité et croissance de l'intégrale :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin(t))^n}_{\geq 0} \underbrace{(\sin(t) - 1)}_{\leq 0} dt \leq 0 .$$

La suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc décroissante.

- Démontrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n \neq W_{n+1}$, en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $W_{n+1} - W_n = 0$. La fonction :

$$g_n : t \longmapsto (\sin(t))^n (\sin(t) - 1)$$

est continue et de signe constant sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par hypothèse :

$$0 = W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} g_n(t) dt .$$

La fonction g_n est donc nulle (propriété de séparation de l'intégrale). Or :

$$g_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \neq 0$$

d'où une contradiction. Ainsi, la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle strictement décroissante.

- Par croissance de l'intégrale :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin(t))^n}_{\geq 0} dt \geq 0 .$$

Donc la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est minorée par 0.

- D'après ce qui précède et le théorème de la limite monotone, la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et sa limite, notée ℓ , vérifie $\ell \geq 0$.

9. Déterminer la limite de la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et donner un équivalent de cette suite.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ et $W_n \geq 0$:

$$W_{n+1} W_n \leq W_n^2 \leq W_{n-1} W_n .$$

D'après la question 7 :

$$\frac{\pi}{2(n+1)} = W_{n+1} W_n \leq W_n^2 \leq W_{n-1} W_n = \frac{\pi}{2n}$$

et donc :

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} W_n \leq 1 .$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et donc $W_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

On se propose de démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

10. Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx .$$

- La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue par morceaux et positive sur $] -\infty, +\infty[$.
- On observe que, d'après les résultats sur les croissances comparées :

$$e^{-x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right) .$$

D'après le critère de Riemann, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par théorème de comparaison, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$.

- La fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow &]-\infty, 0[\\ x & \longmapsto & -x \end{array} \right.$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ qui est strictement décroissante. Comme nous savons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge, le théorème de changement de variable nous livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$$

ainsi que l'identité :

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx .$$

- D'après ce qui précède, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx := \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx .$$

11. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel x vérifiant $0 \leq x \leq \sqrt{n}$:

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $x = \sqrt{n}$, alors l'inégalité à établir s'écrit $0 \leq e^{-n} \leq 2^{-n}$. Elle découle de $2 \leq e$.
- Soit $x \in [0, \sqrt{n}[$.
— Comme $-\frac{x^2}{n} > -1$, nous déduisons de la concavité du logarithme que :

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$$

puis, comme la fonction $u \mapsto \exp(nu)$ est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$(*) \quad \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq \exp\left(n \left(-\frac{x^2}{n}\right)\right) = e^{-x^2} .$$

— Comme $\frac{x^2}{n} > -1$, nous déduisons de la concavité du logarithme que :

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n}$$

puis, comme la fonction $u \mapsto \exp(-nu)$ est décroissante sur $\mathbf{R}$:

$$(**) \quad e^{-x^2} = \exp\left(-n \frac{x^2}{n}\right) \leq \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)\right) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

De (*) et (**), nous déduisons :

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la question précédente :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2} dt.$$

On pourra considérer les changements de variables $x = \sqrt{n} \cos(t)$ et $x = \frac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Par croissance de l'intégrale, nous déduisons de la question précédente que :

$$(*) \quad \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx}_{=: I_n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx}_{=: J_n}.$$

- Calculons I_n . À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n} \cos(t)$, il vient :

$$(**) \quad I_n = \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2(t))^n \sqrt{n} (-\sin(t)) dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{2n+1} dt = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$

- Calculons J_n , que l'on peut considérer comme l'intégrale convergente de la fonction continue par morceaux

$$\left| \begin{array}{ll}]0, \sqrt{n}] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \end{array} \right.$$

sur l'intervalle semi-ouvert $]0, \sqrt{n}]$. On lui applique le théorème de changement de variable pour $x = \frac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$.

Il livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{\tan^2(t)}\right)^{-n} (-\sqrt{n}) (1 + \tan^2(t)) \frac{1}{\tan^2(t)} dt$$

ainsi que l'identité :

$$\begin{aligned} (***) \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx &= \int_{\pi/2}^{\pi/4} \left(1 + \frac{1}{\tan^2(t)}\right)^{-n} (-\sqrt{n}) (1 + \tan^2(t)) \frac{1}{\tan^2(t)} dt \\ &= \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2} dt. \end{aligned}$$

- De (*), (**) et (***), on déduit :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2} dt.$$

13. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

- D'après la question 9, W_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$:

$$(*) \quad \sqrt{n} W_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- Par définition de la valeur d'une intégrale convergente et par composition de limites :

$$(**) \quad \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2} dt = W_{2n-2} - \int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2} dt.$$

On observe que pour tout $t \in [0, \pi/4]$, $0 \leq \sin(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit :

$$0 \leq \int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2} dt \leq \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2n-2}.$$

Donc $\int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2} dt = O\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2}\right)$. Comme $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, les résultats sur les croissances comparées livrent :

$$\int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2} dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

De cette étude et de la question 9, on déduit :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4n-4}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis :

$$(***) \quad \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question 12 et en appliquant (*), (**) et (***), il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

À l'aide de la question 10, nous en déduisons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

3. Groupe orthogonal

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère :

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A \times A^\top = I_n\} \quad \text{et} \quad \mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) : \det(A) = 1\}.$$

14. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

- Une matrice de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est inversible à droite donc inversible (cette matrice est carrée). Ainsi $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$.
- Clairement $I_n \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.
- Soient $A, B \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Alors $B^{-1} = B^\top$ et :

$$A \times B^{-1} \times (A \times B^{-1})^\top = A \times B^{-1} \times (B^{-1})^\top \times A^\top = A \times B^{-1} \times B \times A^\top = A \times A^\top = I_n.$$

Donc $A \times B^{-1} \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

15. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.

- D'après le cours sur $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$, il suffit de démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est fermée et bornée.
- L'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ A & \longmapsto & A \times A^\top \end{array} \right.$$

est continue car, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, les coefficients de $f(A)$ sont des polynômes en les coefficients de A . Comme $\{I_n\}$ est un fermé de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$:

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$$

est fermée dans $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$, comme image inverse d'une partie fermée par une application continue.

- Soit $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

Pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$[A]_{k,\ell}^2 \leq \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} [A]_{i,j}^2 = \text{tr}(A \times A^\top) = n$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_+$:

$$|[A]_{k,\ell}| \leq \underbrace{\sqrt{n}}_{\text{indépendant de } (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}.$$

Par passage au maximum sur l'ensemble des $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, il vient :

$$\|A\|_\infty \leq \underbrace{\sqrt{n}}_{\text{indépendant de } A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})}.$$

La partie $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est donc bornée.

16. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Démontrons par l'absurde que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Supposons donc $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ connexe par arcs.

Comme l'application :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ A & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n [A]_{k, \sigma(k)} \end{array} \right.$$

est continue (le déterminant d'une matrice est un polynôme en les coefficients de cette matrice), $\det(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}))$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}$ (image continue d'un connexe par arcs).

Ainsi $\det(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}))$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ (les connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont les intervalles).

Comme I_n et $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ appartiennent à $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, les nombres $1 = \det(I_n)$ et $-1 = \det(\text{diag}(-1, 1, \dots, 1))$ appartiennent à l'intervalle $\det(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}))$.

Donc $0 \in [-1, 1]$ appartient à $\det(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}))$. Ainsi existe-t-il $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $\det(A) = 0$.

Contradiction (une matrice orthogonale est inversible).

17. Démontrer que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ est compact.

Comme l'application :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ A & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n [A]_{k, \sigma(k)} \end{array} \right.$$

est continue et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{SL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\}) \quad [\text{groupe spécial linéaire}]$$

est fermé de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (image inverse d'une partie fermée par une application continue).

Alors $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (intersection de fermés).

Comme $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact, nous en déduisons que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact (un fermé d'un compact est compact).

18. On admet que :

$$\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

Démontrer que $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

L'application :

$$\rho \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}, |\cdot|) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ \theta & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est continue, car ses applications composantes $(\cos, -\sin, \sin, \cos)$ le sont.

L'ensemble $\mathbf{R}$ est connexe par arcs (convexe).

Nous en déduisons que :

$$\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \rho(\mathbf{R})$$

est connexe par arcs (image continue d'un connexe par arcs).

4. Toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes

Soient $n \geq 1$ et N une norme sur $\mathbf{R}^n$. On rappelle que :

$$N_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

L'objectif de ce problème est de comparer les normes N et N_∞ sur $\mathbf{R}^n$.

Comme $\mathbf{R}^n$ est équipé de plusieurs normes, il faudra indiquer laquelle on considère lorsque l'on énoncera une propriété topologique. Par exemple :

- « La partie ... est compacte pour la norme N_∞ . » est une écriture rigoureuse ;
- « La partie ... est compacte. » est une formulation ambiguë.

19. Démontrer que :

$$\exists \beta > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad N(x) \leq \beta N_\infty(x).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, il vient :

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq N_\infty(x)} N(e_i) \leq N_\infty(x) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n N(e_i)\right)}_{\text{indépendant de } x}.$$

grâce à l'inégalité triangulaire et à l'homogénéité pour la norme N . Par séparation de la norme N , le réel :

$$\beta := \sum_{i=1}^n N(e_i)$$

est strictement positif.

Pour ce choix de $\beta > 0$, nous savons :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad N(x) \leq \beta N_\infty(x).$$

20. Justifier que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}^n, N_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

est continue.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^n$. D'après la seconde inégalité triangulaire pour la norme N et la question précédente :

$$|f(x) - f(y)| = |N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq \beta N_\infty(x - y).$$

L'application $f : (\mathbf{R}^n, N_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est β -lipschitzienne, donc continue.

21. On pose $S_\infty := \{x \in \mathbf{R}^n : N_\infty(x) = 1\}$. Démontrer que l'application :

$$f|_{S_\infty} \left| \begin{array}{ccc} S_\infty & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

admet un minimum m strictement positif.

La partie S_∞ est la sphère unité de $(\mathbf{R}^n, N_\infty)$. Comme cet ensemble est fermé et borné, le cours nous livre sa compacité.

D'après la question précédente, la fonction $f|_{S_\infty}$ est continue sur S_∞ compact (attention aux normes en jeu : la source de f est $(\mathbf{R}^n, N_\infty)$ et S_∞ est une partie compacte de $(\mathbf{R}^n, N_\infty)$). Le théorème des bornes atteintes nous assure de l'existence de $x_m \in S_\infty$ tel que :

$$\forall x \in S_\infty \quad N(x) = f(x) \geq f(x_m) = N(x_m) =: m.$$

Comme $x_m \neq 0_{\mathbf{R}^n}$ (car $N_\infty(x) = 1$), $m > 0$ par séparation de la norme N .

22. En déduire que :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad \alpha N_\infty(x) \leq N(x).$$

- Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $x_m \neq 0_{\mathbf{R}^n}$. Comme $\frac{x}{N_\infty(x)} \in S_\infty$, la question précédente nous livre :

$$N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \geq m.$$

Nous en déduisons que :

$$(\star) \quad \alpha := \underbrace{\frac{1}{m}}_{\text{indépendant de } x \text{ et } > 0} \quad N_\infty(x) \leq N(x).$$

- L'inégalité $(\star)$ vaut également pour $x = 0_{\mathbf{R}^n}$.
- Ainsi :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \alpha N_\infty(x) \leq N(x).$$

Nous avons démontré que :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad \alpha N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta N_\infty(x).$$

23. Soit $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et $x \in \mathbf{R}^n$. Démontrer que :

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N} x \iff x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_\infty} x.$$

Nous démontrons l'implication $\implies$, l'implication réciproque pouvant être établie de manière analogue.

Supposons que $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N} x$.

$$0 \leq N_\infty(x_k - x) \leq \frac{1}{\alpha} N(x_k - x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}}.$$

Par théorème d'encadrement $N_\infty(x_k - x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}}$, i.e. $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_\infty} x$.

Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$.

24. Démontrer que A est ouverte pour la norme N si et seulement si A est ouverte pour la norme N_∞ .

Nous démontrons l'implication $\implies$, l'implication réciproque pouvant être établie de manière analogue.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ pour la norme N . Démontrons que Ω est ouvert pour la norme N_∞ .

Soit $\omega \in \Omega$. Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que $B_N(\omega, r) \subset \Omega$, i.e. tel que :

$$(\star) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad N(x - \omega) < r \implies x \in \Omega$$

Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $N_\infty(x - \omega) < \frac{r}{\beta}$, i.e. $x \in B_{N_\infty}\left(\omega, \frac{r}{\beta}\right)$.

D'après notre étude précédente :

$$N(x - \omega) \leq \beta N_\infty(x - \omega) < r$$

puis, grâce à $(\star)$, que $x \in \Omega$.

Nous avons établi que $B_{N_\infty}\left(\omega, \frac{r}{\beta}\right) \subset \Omega$.

25. Démontrer que A est fermée pour la norme N si et seulement si A est fermée pour la norme N_∞ .

Le résultat est conséquence de la question précédente « par passage au complémentaire ».

26. Démontrer que A est dense dans $\mathbf{R}^n$ pour la norme N si et seulement si A est dense dans $\mathbf{R}^n$ pour la norme N_∞ .

Nous démontrons l'implication $\implies$, l'implication réciproque pouvant être établie de manière analogue.

Supposons A dense dans $\mathbf{R}^n$ pour la norme N .

Soit $x \in \mathbf{R}^n$.

Par caractérisation séquentielle de la densité pour la norme N , il existe $(a_k)_{k \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ tel que $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N} x$.

D'après la question 23, il vient $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_\infty} x$.

La partie A est donc dense dans $\mathbf{R}^n$ pour la norme N_∞ (caractérisation séquentielle de la densité pour la norme N_∞).

27. Démontrer que A est compacte pour la norme N si et seulement si A est compacte pour la norme N_∞ .

Nous démontrons l'implication $\implies$, l'implication réciproque pouvant être établie de manière analogue.

Supposons A compacte pour la norme N .

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$.

Par compacité de A pour la norme N , il existe $a \in A$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $a_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N} a$.

D'après la question 23, $a_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_\infty} a$.

Ainsi A est-elle compacte pour la norme N_∞ .

5. Fonction dilogarithme

L'objectif de ce problème est l'étude de la fonction dilogarithme définie par :

$$\text{Li} : x \longmapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt.$$

On pose, pour $t > 0$ et $t \neq 1$ et pour $x > 0$,

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{1-t} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

28. Démontrer que f se prolonge par continuité en 1 et que g se prolonge par continuité en 0.

- La fonction f est définie et continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Pour tout $t \in]0, 1[$:

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{1-t} = -\frac{\ln(t) - \ln(1)}{t-1}.$$

On reconnaît l'opposé du taux d'accroissement de la fonction $\ln$ en 1. La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = 1$. On en déduit :

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} -1.$$

Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 1.

- La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right)^{-1}.$$

On reconnaît l'inverse du taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0. La fonction $\exp$ est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$. On en déduit :

$$g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 1.$$

Donc la fonction g est prolongeable par continuité en 0.

29. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq 1$.

- L'inégalité à établir est claire pour $x = 0$, puisque $g(0) = 1$. Il reste à l'établir pour tout $x > 0$.
- Comme la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, $e^x > e^0 = 1$. Donc :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \frac{x}{e^x - 1} > 0.$$

- La fonction $\exp$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec une dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Elle est donc convexe sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est donc située au dessus de chacune de ses tangentes. En considérant la tangente au point d'abscisse $x = 0$, il vient :

$$\forall x > 0 \quad e^x \geq x + 1$$

d'où :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{x}{e^x - 1} \leq 1.$$

30. Démontrer que le domaine de définition de la fonction dilogarithme est $[0, +\infty[$.

On distingue plusieurs cas pour prouver que $\text{Li}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

• Cas où $x = 0$.

— La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1-t}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0, 1[$.

— La fonction f étant prolongeable par continuité en 1, l'intégrale $\int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$ est convergente.

— Par croissances comparées :

$$|f(t)| \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

D'après Riemann, l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est absolument convergente. Par théorème d'intégration des relations de comparaison, nous en déduisons que l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{1-t} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

— Nous avons établi que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$ est convergente donc :

$$\text{Li}(0) := - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$$

est bien définie.

• Cas où $x \in]0, 1[$.

— Notons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $]0, +\infty[$, i.e. :

$$\tilde{f} \left| \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(t)}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ -1 & \text{si } t = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction :

$$\varphi \left| \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \int_1^y \tilde{f}(t) dt \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de $\tilde{f}$ nulle en 1.

— La fonction f étant continue sur $]0, 1[$, la seule singularité de l'intégrale $\int_x^1 f(t) dt$ est en 1.

— Soit $y \in]x, 1[$, de sorte que $]x, y[\subset]0, 1[$.

$$\int_x^y f(t) dt = \int_x^y \tilde{f}(t) dt = \varphi(y) - \varphi(x)$$

La fonction φ est dérivable en 1, donc continue en 1. On en déduit :

$$\int_x^y f(t) dt = \varphi(y) - \varphi(x) \xrightarrow{y \rightarrow 1^-} \varphi(1) - \varphi(x) = -\varphi(x).$$

Donc $\text{Li}(x) := -\int_1^x f(t) dt$ est bien défini et :

$$\text{Li}(x) = \varphi(x).$$

- Cas où $x \in]1, +\infty[$. On démontre, comme on l'a fait pour le cas $x \in]0, 1[$, que $\text{Li}(x)$ est bien défini et égale $\varphi(x)$.
- Conclusion. Nous a établi que Li est bien définie sur $\mathbf{R}_+$ et que :

$$\forall x > 0 \quad \text{Li}(x) = \varphi(x)$$

où φ est l'unique primitive de la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ qui est nulle en 1.

31. Justifier soigneusement que la fonction dilogarithme est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.

D'après la question précédente, les fonctions Li et φ coïncident sur $\mathbf{R}_+^*$. Nous en déduisons que Li est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0 \quad \text{Li}'(x) = \varphi'(x) = \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

32. Pourquoi la fonction Li est-elle continue en 0 ?

Soit $x \in]0, 1[$. Nous avons déjà établi que l'intégrale $\int_0^{1/2} f(t) dt$ est convergente. Donc :

$$\begin{aligned} \text{Li}(x) &= \int_1^x f(t) dt \\ &:= -\left(\int_x^{1/2} f(t) dt + \int_{1/2}^1 f(t) dt\right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\left(\int_0^{1/2} f(t) dt + \int_{1/2}^1 f(t) dt\right) \\ &=: \int_1^0 f(t) dt \\ &= \text{Li}(0). \end{aligned}$$

Nous avons établi la continuité de Li en 0.

On se propose à présent de calculer la valeur $\text{Li}(0)$.

33. Démontrer que $\text{Li}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$.

La fonction :

$$\psi \mid \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow &]0, 1[\\ x & \longmapsto & e^{-x} \end{array}$$

est une bijection, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante. Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$ converge, le théorème

de changement de variable nous livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\varphi(x))}{1-\varphi(x)} \varphi'(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$$

ainsi que l'identité :

$$-\text{Li}(0) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx .$$

qui nous donne le résultat demandé.

34. Justifier que, pour tout $k \geq 1$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$$

est convergente, et calculer sa valeur.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \mapsto x e^{-kx}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $A > 0$. Les fonctions :

$$u: x \mapsto x \quad \text{et} \quad v: x \mapsto -\frac{1}{k} e^{-kx}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$. Par intégration par parties il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x e^{-kx} dx &= \left[-\frac{x}{k} e^{-kx} \right]_0^A + \frac{1}{k} \int_0^A e^{-kx} dx \\ &= -\frac{A}{k} e^{-kA} + \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{k} e^{-kx} \right]_0^A \\ &= -\frac{A}{k} e^{-kA} - \frac{1}{k^2} e^{-kA} + \frac{1}{k^2} . \end{aligned}$$

Par croissances comparées :

$$-\frac{A}{k} e^{-kA} - \frac{1}{k^2} e^{-kA} + \frac{1}{k^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2} \in \mathbb{R} .$$

- Nous avons démontré que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$ converge et que $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2}$.

35. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx .$$

Démontrer que :

$$\text{Li}(0) - S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
 \text{Li}(0) - S_n &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx - \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx \quad [\text{cf. question précédente}] \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx - \int_0^{+\infty} x \left(\sum_{k=1}^n (e^{-x})^k \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx - \int_0^{+\infty} x e^{-x} \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} dx \quad [\text{somme de termes en progression géométrique}] \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx - \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx
 \end{aligned}$$

et nous en déduisons, par linéarité, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx$ converge et que :

$$\text{Li}(0) - S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx.$$

36. En déduire que :

$$0 \leq \text{Li}(0) - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient ε et A deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon < 1 < A$. D'après la question 29, pour tout $x \in [\varepsilon, A]$:

$$0 \leq \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} \leq e^{-nx}$$

et donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_{\varepsilon}^A \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \int_{\varepsilon}^A e^{-nx} dx = -\frac{e^{-nA}}{n} + \frac{e^{-n\varepsilon}}{n}.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'inégalité :

$$0 \leq \int_{\varepsilon}^1 \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx + \int_1^A \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq -\frac{e^{-nA}}{n} + \frac{e^{-n\varepsilon}}{n}$$

il vient :

$$0 \leq \int_{\varepsilon}^1 \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \frac{e^{-n\varepsilon}}{n}$$

car l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx$ converge. En faisant tendre puis ε vers 0 dans cette dernière inégalité, nous obtenons :

$$0 \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx}_{\text{Li}(0) - S_n} \leq \frac{1}{n}.$$

car l'intégrale $\int_0^1 \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx$ converge.

37. En admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, démontrer que $\text{Li}(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

Nous avons établi que :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \text{Li}(0) \leq \frac{1}{n} + S_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\frac{\pi^2}{6} \leq \text{Li}(0) \leq \frac{\pi^2}{6}$ d'où $\text{Li}(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

38. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t} dt$? En déduire l'existence et la valeur limite de $\text{Li}(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1-t}$ est continue, négative, sur $]1, +\infty[$ et se prolonge par continuité en 1.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1-t} dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t-1} dt$ converge, d'après les résultats sur la linéarité des intégrales convergentes.

Nous observons :

$$0 \leq \frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\ln t}{t-1}\right).$$

D'après Riemann, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente.

Par théorème d'intégration des relations de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, nous en déduisons que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1} dt$ est divergente.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1} dt$ est une intégrale de fonction positive, qui diverge. D'après le cours :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t-1} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi

$$\text{Li}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

39. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction Li .

On sait que la fonction Li est décroissante sur $[0, +\infty[$. On connaît sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$. On en déduit aisément l'allure de la courbe représentative de Li .

40. On pose, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$u(x) = \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) \quad \text{et} \quad v(x) = -\ln(1-x)\ln(x).$$

Démontrer qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$u(x) = v(x) + C.$$

Posons $h = u - v$. On démontre aisément que h est dérivable sur $]0, 1[$ et que $h'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, 1[$, en utilisant la question 31. Ainsi h est constante sur l'intervalle $]0, 1[$.

41. Déterminer C .

Gardons les mêmes notations et faisons tendre x vers 0. La fonction u est continue en 0 et $u(0) = \text{Li}(0) = \frac{\pi^2}{6}$. La

fonction v a pour limite 0 quand x tend vers 0, car au voisinage de 0 :

$$v(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x \ln(x).$$

et que cette dernière quantité tend vers 0 par croissances comparées. On en déduit que $C = \frac{\pi^2}{6}$.