

Devoir surveillé n°3 — piste bleue

samedi 8 novembre de 8h07 à 12h07

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

1. Questions de cours	1
2. Intégrales de Wallis et de Gauß	1
3. Groupe orthogonal	2
4. Toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes	3
5. Fonction dilogarithme	4

1. Questions de cours

- Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et calculer sa valeur.
- Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente, mais non absolument convergente.

Dans la suite de cette partie, (E, N_E) désigne un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé et A une partie compacte de E .

- Démontrer que la partie A est fermée et bornée.
- Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ une suite qui possède une unique valeur d'adhérence. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
- Soient (F, N_F) un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application continue. Démontrer que $f(A)$ est compacte.

2. Intégrales de Wallis et de Gauß

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt.$$

On se propose de déterminer un équivalent de W_n , quand n tend vers $+\infty$.

- Établir pour $n \in \mathbf{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n .
- En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

- Démontrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante et qu'elle converge.
- Déterminer la limite de la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et donner un équivalent de cette suite.

On se propose de démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

10. Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx .$$

11. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout réel x vérifiant $0 \leq x \leq \sqrt{n}$:

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} .$$

12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la question précédente :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2} dt .$$

On pourra considérer les changements de variables $x = \sqrt{n} \cos(t)$ et $x = \frac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$.

13. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

3. Groupe orthogonal

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère :

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A \times A^\top = I_n\} \quad \text{et} \quad \mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) : \det(A) = 1\} .$$

14. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

15. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.

16. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs.

17. Démontrer que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ est compact.

18. On admet que :

$$\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbf{R} \right\} .$$

Démontrer que $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

4. Toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes

Soient $n \geq 1$ et N une norme sur $\mathbf{R}^n$. On rappelle que :

$$N_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

L'objectif de ce problème est de comparer les normes N et N_∞ sur $\mathbf{R}^n$.

Comme $\mathbf{R}^n$ est équipé de plusieurs normes, il faudra indiquer laquelle on considère lorsque l'on énoncera une propriété topologique. Par exemple :

- « La partie ... est compacte pour la norme N_∞ . » est une écriture rigoureuse ;
- « La partie ... est compacte. » est une formulation ambiguë.

19. Démontrer que :

$$\exists \beta > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad N(x) \leq \beta N_\infty(x).$$

20. Justifier que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}^n, N_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

est continue.

21. On pose $S_\infty := \{x \in \mathbf{R}^n : N_\infty(x) = 1\}$. Démontrer que l'application :

$$f|_{S_\infty} \left| \begin{array}{ccc} S_\infty & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

admet un minimum m strictement positif.

22. En déduire que :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad \alpha N_\infty(x) \leq N(x).$$

Nous avons démontré que :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad \alpha N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta N_\infty(x).$$

23. Soit $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et $x \in \mathbf{R}^n$. Démontrer que :

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N} x \iff x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_\infty} x.$$

Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$.

24. Démontrer que A est ouverte pour la norme N si et seulement si A est ouverte pour la norme N_∞ .

25. Démontrer que A est fermée pour la norme N si et seulement si A est fermée pour la norme N_∞ .

26. Démontrer que A est dense dans $\mathbf{R}^n$ pour la norme N si et seulement si A est dense dans $\mathbf{R}^n$ pour la norme N_∞ .

27. Démontrer que A est compacte pour la norme N si et seulement si A est compacte pour la norme N_∞ .

5. Fonction dilogarithme

L'objectif de ce problème est l'étude de la fonction dilogarithme définie par :

$$\text{Li} : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt .$$

On pose, pour $t > 0$ et $t \neq 1$ et pour $x > 0$,

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{1-t} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{e^x - 1} .$$

28. Démontrer que f se prolonge par continuité en 1 et que g se prolonge par continuité en 0.
29. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq 1$.
30. Démontrer que le domaine de définition de la fonction dilogarithme est $[0, +\infty[$.
31. Justifier soigneusement que la fonction dilogarithme est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.
32. Pourquoi la fonction Li est-elle continue en 0 ?

On se propose à présent de calculer la valeur $\text{Li}(0)$.

$$33. \text{ Démontrer que } \text{Li}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx .$$

34. Justifier que, pour tout $k \geq 1$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$$

est convergente, et calculer sa valeur.

35. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx .$$

Démontrer que :

$$\text{Li}(0) - S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx .$$

36. En déduire que :

$$0 \leq \text{Li}(0) - S_n \leq \frac{1}{n} .$$

37. En admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, démontrer que $\text{Li}(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

38. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t} dt$? En déduire l'existence et la valeur limite de $\text{Li}(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

39. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction Li .

40. On pose, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$u(x) = \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) \quad \text{et} \quad v(x) = -\ln(1-x)\ln(x).$$

Démontrer qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$u(x) = v(x) + C.$$

41. Déterminer C .