

Devoir surveillé n°2

samedi 4 octobre de 8h00 à 12h00

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Préambule

Le sujet se compose de trois parties :

- quatre questions de cours ;
- un exercice de topologie matricielle
- un problème portant sur la réduction.

Questions de cours

La lettre **K** désigne le corps **R** ou **C**.

1. Soient E un **K**-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u . Démontrer que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.
2. Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur le corps **K**. Démontrer que l'endomorphisme u est trigonalisable.
3. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Soient (E, N) un **K**-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E , qui converge dans E . Démontrer que la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique.

Exercice de topologie matricielle

Dans cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\llbracket 1, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et n .

C désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$) désigne l'espace des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans **C** (resp. dans **R**).

Lorsque $m = n$, on utilisera la notation $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$).

$\mathbf{C}^n$ est identifié à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans **C**. Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbf{C}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$. Dans tout le problème, $\mathbf{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

La matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}.$$

1. (a) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence :

$$\|M\| \leq C \iff (\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1).$$

(b) Montrer que l'application $M \mapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j . Montrer que :

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

4. On dit qu'une suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite $(A^{(k)})$ converge vers B si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - B\| = 0$.

5. On considère dans cette question une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \text{diag}(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Calculer $P_b^{-1}AP_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?

- (b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que :

$$\|P_b^{-1}AP_b\| < 1.$$

- (c) En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.