

Un corrigé de l'exercice de topologie matricielle (X-ÉNS PC 2017) adapté d'un travail d'Édouard Lebeau

Dans cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

$\mathbb{C}^n$ est identifié à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$. Dans tout le problème, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

La matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera notée $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}$.

1. (a) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence :

$$\|M\| \leq C \iff (\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1).$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $C > 0$.

- *Sens direct.* On fait l'hypothèse $\|M\| \leq C$, c'est-à-dire $\sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$.

Pour tout x non nul de $\mathbb{C}^n$, on a donc la majoration $\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$. On multiplie par $\|x\|_1$, qui est positif, ce qui donne $\|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$. Cette inégalité est également valable si x est nul.

- *Sens réciproque.* Réciproquement, on fait l'hypothèse :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

Pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{C}^n$, on en déduit l'inégalité $\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$ car $\|x\|_1 > 0$, donc $\|M\| \leq C$.

- *Conclusion.* On a prouvé l'équivalence :

$$\|M\| \leq C \iff \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

- *Remarque.* On a prouvé en particulier l'inégalité $\|Mx\|_1 \leq \|M\| \times \|x\|_1$ et qu'on possède une méthode pour majorer $\|M\|$ dans le cas général. Ces deux points serviront fréquemment dans ce qui suit.

(b) Montrer que l'application $M \mapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- *Valeurs prises par l'application.* Déjà, la fonction $M \mapsto \|M\|$ est à valeurs réelles positives.
- *Séparation.* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|M\| = 0$. À la question précédente, on n'a pas utilisé le caractère strict de l'inégalité $C > 0$. On peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|Mx\|_1 \leq 0.$$

Par positivité de la norme, on obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|Mx\|_1 = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad Mx = 0.$$

Les colonnes de la matrice M sont les produits Me_i , où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, les colonnes de M sont nulles donc M est la matrice nulle.

- *Homogénéité.* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Exploitions l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_1$:

$$\|\lambda Mx\|_1 = |\lambda| \times \|Mx\|_1 \leq |\lambda| \times \|M\| \times \|x\|_1.$$

On en déduit la majoration $\|\lambda M\| \leq |\lambda| \times \|M\|$ d'après 1.(a).

Si $\lambda = 0$, on obtient $\|\lambda M\| \leq 0$ donc $\|\lambda M\| = 0 = |\lambda| \times \|M\|$.

Si $\lambda \neq 0$, on effectue la substitution $(M, \lambda) \leftarrow (\lambda M, 1/\lambda)$ dans l'inégalité $\|\lambda M\| \leq |\lambda| \times \|M\|$, pour obtenir $\|M\| \leq \|\lambda M\|/|\lambda|$, c'est-à-dire $\|\lambda M\| \geq |\lambda| \times \|M\|$.

On obtient donc $\|\lambda M\| = |\lambda| \times \|M\|$ dans tous les cas.

- *Inégalité triangulaire.* Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_1$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|(M+N)x\|_1 \leq \|Mx\|_1 + \|Nx\|_1 \leq \|M\| \times \|x\|_1 + \|N\| \times \|x\|_1.$$

On en déduit l'inégalité $\|M+N\| \leq \|M\| + \|N\|$ par application de 1.(a).

- *Conclusion.* On a montré que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En appliquant 1.(a) dans le sens $\implies$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|(AB)x\|_1 \leq \|A\| \times \|Bx\|_1 \leq \|A\| \times \|B\| \times \|x\|_1.$$

En appliquant 1.(a) dans le sens $\impliedby$, on en déduit l'inégalité $\|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j . Montrer que :

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

- *Une première inégalité.* Posons $S(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$ et notons j_0 un indice qui réalise ce maximum.

En notant de nouveau $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on observe l'égalité :

$$Ae_{j_0} = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix}$$

puis $S(A) = \|Ae_{j_0}\|_1$.

L'égalité $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ donne alors $S(A) = \frac{\|Ae_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} \leq \|A\|$.

- *La seconde inégalité.* Pour l'inégalité réciproque, prenons x quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

$$Ax = A \times \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n x_j \times Ae_j$$

L'inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_1$ donne alors :

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \times \|Ae_k\|_1.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on observe les relations :

$$\|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq S(A)$$

donc :

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \times S(A) = S(A) \times \|x\|_1.$$

D'après 1.(a), on en déduit la majoration $\|A\| \leq S(A)$.

- *Conclusion.* Par double inégalité, on a prouvé l'égalité $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

4. On dit qu'une suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite $(A^{(k)})$ converge vers B si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - B\| = 0$.

- *Sens direct.* On commence par supposer que la suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice B . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on remarque l'encadrement :

$$0 \leq \|A^{(k)} - B\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}|.$$

Chaque terme du membre de droite tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ donc, par le théorème des gendarmes, on voit que $\|A^{(k)} - B\|$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

- *Sens direct.* Réciproquement, on suppose que $\|A^{(k)} - B\|$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe l'encadrement :

$$0 \leq |a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}| \leq \sum_{s=1}^n |a_{s,j}^{(k)} - b_{s,j}| \leq \|A^{(k)} - B\|.$$

On en déduit que $a_{i,j}^{(k)}$ tend vers $b_{i,j}$ quand k tend vers $+\infty$. Ainsi, la suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice B .

- *Remarque.* Ici est établi un résultat utile dans la suite : une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge vers une matrice pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement s'il y a convergence coefficient par coefficient.

5. On considère dans cette question une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$

On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,i}| < 1$.

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \text{diag}(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Calculer $P_b^{-1}AP_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?

Le calcul donne :

$$P_b^{-1}AP_b = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ba_{1,2} & b^2a_{1,3} & \cdots & b^{n-1}a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & ba_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b^2a_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ba_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $P_b^{-1}AP_b$ tend vers la matrice $\text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ quand b tend vers 0 (coefficient par coefficient donc pour la norme $\|\cdot\|$, d'après la question 4).

(b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que $\|P_b^{-1}AP_b\| < 1$.

D'après les questions 4 et 5.(a) :

$$\left\| P_{1/k}^{-1} A P_{1/k} - \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Par hypothèse :

$$\left\| \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i,i}| < 1.$$

Ainsi :

$$\varepsilon := \frac{1 - \left\| \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\|}{2} > 0.$$

Il existe donc un rang $K_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \geq K_\varepsilon \quad \left\| P_{1/k}^{-1} A P_{1/k} - \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\| \leq \varepsilon = \frac{1 - \left\| \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\|}{2}.$$

En particulier pour $k := K_\varepsilon$, on obtient :

$$\left\| P_{1/K_\varepsilon}^{-1} A P_{1/K_\varepsilon} - \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\| \leq \frac{1 - \left\| \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\|}{2}.$$

Avec la seconde inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\left\| P_{1/K_\varepsilon}^{-1} A P_{1/K_\varepsilon} \right\| - \left\| \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\| \leq \frac{1 - \left\| \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\|}{2}$$

puis :

$$\left\| P_{1/K_\varepsilon}^{-1} A P_{1/K_\varepsilon} \right\| \leq \frac{1 + \overbrace{\left\| \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \right\|}^{<1}}{2} < 1.$$

Le réel $b := 1/K_\varepsilon$ convient donc.

(c) En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Gardons la notation b de la question précédente.

- Une itération de l'inégalité de la question 2 donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \left\| (P_b^{-1}AP_b)^k \right\| \leq \left\| P_b^{-1}AP_b \right\|^k.$$

L'inégalité $\left\| P_b^{-1}AP_b \right\| < 1$ donne que $\left\| P_b^{-1}AP_b \right\|^k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

- Rappelons l'identité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad (P_b^{-1}AP_b)^k = P_b^{-1} A^k P_b.$$

- L'inégalité de la question 2 donne maintenant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \left\| A^k \right\| \leq \|P_b\| \times \left\| (P_b^{-1}AP_b)^k \right\| \times \|P_b^{-1}\|$$

si bien que $\left\| A^k \right\|$ tend également vers 0.

- La suite de matrices $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle (pour la norme $\|\cdot\|$ donc coefficient par coefficient, d'après la question 4).