

Devoir surveillé n°1 [124]

samedi 13 septembre de 8h00 à 11h00

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

1. Questions de cours [18]	1
2. Tirs successifs d'un archer sur une cible [16]	1
3. Nombre de points fixes d'une permutation [10]	2
4. Structure de l'ensemble des applications lipschitziennes [8]	2
5. Racine carrée de $-I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ [22]	2
6. Action d'un groupe et théorème de Cauchy [50]	3
6.1. Action d'un groupe	3
6.2. Formule des classes	4
6.3. Théorème de Cauchy	4

1. Questions de cours [18]

- Q1. [4] Énoncer, puis démontrer l'inégalité de Markov. [1 énoncé + 3 démonstration]
- Q2. [4] Soient $\mathbf{K}$ un corps, E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Démontrer que F est de dimension finie, de même dimension que E .
- Q3. [4] Énoncer, puis démontrer la version géométrique du théorème du rang. [1 énoncé + 3 démonstration]
- Q4. [6] Soient $\mathbf{K}$ un corps, E, F, G des $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F , $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_p)$ une base de G , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{G}, \mathcal{G}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u).$$

2. Tirs successifs d'un archer sur une cible [16]

Un archer tire sur n cibles ($n \geq 2$).

À chaque tir, il a la probabilité $p \in]0, 1[$ de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants.

Il tire une première fois sur chaque cible et l'on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet.

L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative.

- Q5. [4] Déterminer la loi de X . [1 loi avec ensemble des valeurs et formules + 3 justification, 2/4 si la loi est reconnue et justifiée sans donner ensemble des valeurs et formules, 0/4 si aucun argument]
- Q6. [4] Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(Y = i | X = k)$. [2 formule par morceaux (1/2 sinon), 2 justification, bonus 1 loi conditionnelle]
- Q7. [6] Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$. [1 pour la formule des probabilités totales ou la décomposition ensembliste de $(Z = k)$ en union disjointe, 4 calcul de la somme, 1 reconnaissance loi binomiale]
- Q8. [2] Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(Z)$. [1+1, sans justification]

3. Nombre de points fixes d'une permutation [10]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Soit X la variable aléatoire définie par :

$$X \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow \quad \llbracket 0, n \rrbracket \\ \sigma & \longmapsto \quad |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \sigma(k) = k\}| . \end{array} \right.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la variable X_i par :

$$X_i \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow \quad \llbracket 0, n \rrbracket \\ \sigma & \longmapsto \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases} \end{array} \right.$$

- Q9. [3] Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la loi de X_i , son espérance et sa variance. [0 ou 2 pour la loi suivant la qualité de la justification, 0 ou 1 sans justification pour espérance et variance]
- Q10. [3] Soient i et j des éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$. [1 pour la définition, 0 ou 2 pour $E(X_i X_j)$ suivant la qualité de la justification]
- Q11. [4] Déterminer l'espérance et la variance de X . [1 espérance, 2 formule sommatoire variance + 1 résultat correct]

4. Structure de l'ensemble des applications lipschitziennes [8]

Soient a et b des réels tels que $a < b$ et $\text{Lip}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications lipschitziennes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

- Q12. [4] Démontrer que $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \subset \text{Lip}([a, b], \mathbb{R})$. [1 théorème des bornes atteintes, 2 pour théorème des accroissements finis ou théorème fondamental de l'algèbre appliqué pour expliquer en détails, 1 pour conclusion]
- Q13. [4] Démontrer que $\text{Lip}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$. [1 pour fonction nulle, 3 pour stabilité par combinaison linéaire, 0/3 si variables non introduites]

5. Racine carrée de $-I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [22]

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie non nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 = -\text{id}_E$.

- Q14. [2] Justifier que f est bijective et préciser f^{-1} . [0/2 si calcul sans argument]
- Q15. [2] Démontrer que E est de dimension paire.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim(E) = 2p$.
- Q16. [4] Démontrer que pour tout vecteur a non nul de E , la famille $(a, f(a))$ est libre. [1 pour le schéma rédactionnel « preuve de la liberté d'une famille », 3 pour le reste]
- Q17. [6] Démontrer qu'il existe des vecteurs non nuls $a_1, \dots, a_p$ de E tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\{a_i, f(a_i)\}) .$$

[1 pour caractérisation d'une somme directe par l'unicité de l'écriture de 0_E , +2 si des idées pertinentes, récurrence atténuée pour 6]

Q18. [3] Construire une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1} - E_{1,2} + E_{4,3} - E_{3,4} + \dots + E_{2p,2p-1} - E_{2p-1,2p}$$

[2 points construction d'une base, 0 ou 1 point le soin de la conclusion]

Q19. [5] Soit $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -I_{2p}$. Démontrer que la matrice A est semblable à la matrice R . **[1 introduction f_A , 1 justification $f_A^2 = -\text{id}$, 1 application résultat Q18, 2 théorème de changement de base]**

6. Action d'un groupe et théorème de Cauchy [50]

6.1. Action d'un groupe

Soient E un ensemble fini et $(G, *)$ un groupe, dont le neutre est noté e_G . On se donne une application :

$$\rho \quad \left| \begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x := \rho(g, x) \end{array} \right.$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(A1) \quad \forall x \in E \quad e_G \cdot x = x ;$$

$$(A2) \quad \forall (g_1, g_2) \in G^2 \quad \forall x \in E \quad g_1 \cdot \underbrace{(g_2 \cdot x)}_{\in E} = \underbrace{(g_1 * g_2)}_{\in G} \cdot x .$$

Une telle application ρ est appelée action du groupe $(G, *)$ sur E .

Q20. [3] Soit $x \in E$. Le stabilisateur de x est l'ensemble $\text{Stab}(x)$ défini par :

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G : g \cdot x = x\} \subset G .$$

Démontrer que $\text{Stab}(x)$ est un sous-groupe de $(G, *)$. **[1 neutre, 2 stabilité produit tordu]**

À tout $x \in E$, on associe son orbite $\mathcal{O}(x)$ définie par :

$$\mathcal{O}(x) := \{g \cdot x : g \in G\} \subset E .$$

Q21. [4] Soient $(x_1, x_2) \in E^2$. Démontrer que $\mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$ ou $\mathcal{O}(x_1) = \mathcal{O}(x_2)$. **[2/4 si la logique est confuse]**

Q22. [4] Soient $\mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_p)$ une liste exhaustive et sans répétition de toutes les orbites. Justifier :

$$E = \bigsqcup_{k=1}^p \mathcal{O}(x_k) \quad [\text{réunion disjointe}]$$

et en déduire une expression de $\text{card}(E)$ en fonction des cardinaux des orbites $\mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_p)$. **[2 égalité ensembliste, 1 caractère disjoint, 1 cardinal]**

Q23. [3] Nous savons qu'une relation d'équivalence sur E livre une partition de E : celle donnée par les classes d'équivalences. Proposer une relation d'équivalence $\sim$ sur E dont la partition de E associée est celle obtenue à la question précédente. **[2/3 si relation d'équivalence juste mais argumentation défailante]**

6.2. Formule des classes

Nous considérons ici un ensemble fini E , muni d'une action de groupe ρ par un groupe fini $(G, *)$ et nous fixons un élément $x \in E$.

Q24. [3] Soit τ l'application définie par :

$$\tau \left| \begin{array}{ll} G & \longrightarrow \mathcal{O}(x) \\ g & \longmapsto g \cdot x . \end{array} \right.$$

Justifier que :

$$G = \bigsqcup_{y \in \mathcal{O}(x)} \tau^{-1}(\{y\}) .$$

[2 égalité ensembliste, 1 caractère disjoint]

Q25. [6] Soit $y \in \mathcal{O}(x)$. Démontrer que les ensembles $\text{Stab}(x)$ et $\tau^{-1}(\{y\})$ sont équipotents. **[2 application, 2 caractère bien défini, 2 bijectivité]**

Q26. [3] En déduire la formule des classes, qui s'énonce comme suit :

$$\text{card}(\mathcal{O}(x)) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(\text{Stab}(x))} .$$

[0/3 si les résultats antérieurs utiles ne sont pas cités avec soin]

6.3. Théorème de Cauchy

Soient $(\Gamma, *)$ un groupe fini de cardinal n et p un diviseur premier de n . Nous nous proposons de démontrer que :

$$\exists \gamma \in \Gamma \quad \gamma \neq e_\Gamma \quad \text{et} \quad \gamma^p = e_\Gamma$$

où e_Γ désigne le neutre du groupe $(\Gamma, *)$. Il s'agit d'un théorème dû à Cauchy.

Nous introduisons l'ensemble :

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

$$E := \{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \Gamma^p : \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_p = e_\Gamma\} \subset \Gamma^p .$$

Q27. [3] Démontrer que E est un ensemble fini, de cardinal n^{p-1} . **[2/3 si une bijection n'est pas proposée mais qu'il est expliqué que la dernière composante est imposée par les précédentes]**

Soit $c \in \mathfrak{S}_p$ le cycle de longueur p défini par :

$$c := (1 \quad 2 \quad \dots \quad p-1 \quad p)$$

de sorte que $c(p) = 1$ et :

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \quad c(i) = i+1 .$$

Q28. [5] Démontrer que :

$$G := \{c^k : k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$$

est un sous-groupe du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_p, \circ)$ et que $\text{card}(G) = p$. **[1 neutre, 1 stabilité par produit, 1 stabilité par passage au symétrique, 2 pour cardinal]**

Pour tout $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \Gamma^p$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on définit $\sigma \cdot \gamma \in \Gamma^p$ par :

$$\sigma \cdot \gamma := (\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, \dots, \gamma_{\sigma(p)}) \quad [\text{permutation des composantes de } \gamma] .$$



Q29. [4] Soit $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in E$. Démontrer que :

$$\forall \sigma \in G \quad \sigma \cdot \gamma \in E.$$

[3/4 pour $c \cdot \gamma \in E$ sans récurrence finie pour les puissances]

Q30. [3] D'après la question précédente, l'application ρ définie par :

$$\rho \left| \begin{array}{ll} G \times E & \longrightarrow E \\ (\sigma, \gamma) & \longmapsto \sigma \cdot \gamma \end{array} \right.$$

est bien définie. Démontrer qu'elle définit une action du groupe G sur l'ensemble E , i.e. que les propriétés (A1) et (A2) de la partie I sont vérifiées. **[1 (A1), 2 (A2)]**

Fixons un élément $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in E$.

Q31. Démontrer **[1]** que $\text{card}(\mathcal{O}(\gamma))$ est égal à 1 ou p .

Q32. [3] Démontrer :

$$\text{card}(\mathcal{O}(\gamma)) = 1 \implies \gamma_1^p = e_\Gamma.$$

[toute réponse pertinente reçoit 2/3 même avec une rédaction approximative]

Q33. [5] En déduire qu'il existe $\kappa \in \Gamma$ tel que $\kappa \neq e_\Gamma$ et $\kappa^p = e_\Gamma$. **[majoration par 2/5 si les résultats antérieurs utiles ne sont pas cités avec soin]**