

Devoir surveillé n°1

samedi 13 septembre de 8h00 à 11h00

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

1. Questions de cours	1
2. Tirs successifs d'un archer sur une cible	1
3. Nombre de points fixes d'une permutation	3
4. Structure de l'ensemble des applications lipschitziennes	4
5. Racine carrée de $-I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$	5
6. Action d'un groupe et théorème de Cauchy	8
6.1. Action d'un groupe	8
6.2. Formule des classes	10
6.3. Théorème de Cauchy	12

1. Questions de cours

- Q1.** Énoncer, puis démontrer l'inégalité de Markov.
- Q2.** Soient $\mathbf{K}$ un corps, E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Démontrer que F est de dimension finie, de même dimension que E .
- Q3.** Énoncer, puis démontrer la version géométrique du théorème du rang.
- Q4.** Soient $\mathbf{K}$ un corps, E, F, G des $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F , $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_p)$ une base de G , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{G}, \mathcal{G}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u).$$

2. Tirs successifs d'un archer sur une cible

Un archer tire sur n cibles ($n \geq 2$).

À chaque tir, il a la probabilité $p \in]0, 1[$ de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants.

Il tire une première fois sur chaque cible et l'on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet.

L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative.

- Q5.** Déterminer la loi de X .
- Q6.** Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(Y = i \mid X = k)$.
- Q7.** Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.
- Q8.** Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(Z)$.

3. Nombre de points fixes d'une permutation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Soit X la variable aléatoire définie par :

$$X \left| \begin{array}{ll} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow \\ \sigma & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \sigma(k) = k\}| \end{array} .$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la variable X_i par :

$$X_i \left| \begin{array}{ll} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow \\ \sigma & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \llbracket 0, n \rrbracket \\ \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases} \end{array}$$

Q9. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la loi de X_i , son espérance et sa variance.

Q10. Soient i et j des éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

Q11. Déterminer l'espérance et la variance de X .

4. Structure de l'ensemble des applications lipschitziennes

Soient a et b des réels tels que $a < b$ et $\text{Lip}([a, b], \mathbf{R})$ l'ensemble des applications lipschitziennes de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$.

Q12. Démontrer que $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R}) \subset \text{Lip}([a, b], \mathbf{R})$.

Q13. Démontrer que $\text{Lip}([a, b], \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbf{R})$.

5. Racine carrée de $-I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soient E un $\mathbf{R}$ -espace de dimension finie non nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 = -\text{id}_E$.

Q14. Justifier que f est bijective et préciser f^{-1} .

Q15. Démontrer que E est de dimension paire.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim(E) = 2p$.

Q16. Démontrer que pour tout vecteur a non nul de E , la famille $(a, f(a))$ est libre.

Q17. Démontrer qu'il existe des vecteurs non nuls $a_1, \dots, a_p$ de E tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\{a_i, f(a_i)\}) .$$

Q18. Construire une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1} - E_{1,2} + E_{4,3} - E_{3,4} + \dots + E_{2p,2p-1} - E_{2p-1,2p}$$

Q19. Soit $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -I_{2p}$. Démontrer que la matrice A est semblable à la matrice R .

6. Action d'un groupe et théorème de Cauchy

6.1. Action d'un groupe

Soient E un ensemble fini et $(G, *)$ un groupe, dont le neutre est noté e_G . On se donne une application :

$$\rho \quad \left| \begin{array}{ll} G \times E & \longrightarrow E \\ (g, x) & \longmapsto g \cdot x := \rho(g, x) \end{array} \right.$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(A1) \quad \forall x \in E \quad e_G \cdot x = x ;$$

$$(A2) \quad \forall (g_1, g_2) \in G^2 \quad \forall x \in E \quad \underbrace{g_1 \cdot (g_2 \cdot x)}_{\in E} = \underbrace{(g_1 * g_2)}_{\in G} \cdot x .$$

Une telle application ρ est appelée action du groupe $(G, *)$ sur E .

Q20. Soit $x \in E$. Le stabilisateur de x est l'ensemble $\text{Stab}(x)$ défini par :

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G : g \cdot x = x\} \subset G .$$

Démontrer que $\text{Stab}(x)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

À tout $x \in E$, on associe son orbite $\mathcal{O}(x)$ définie par :

$$\mathcal{O}(x) := \{g \cdot x : g \in G\} \subset E .$$

Q21. Soient $(x_1, x_2) \in E^2$. Démontrer que $\mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$ ou $\mathcal{O}(x_1) = \mathcal{O}(x_2)$.

Q22. Soient $\mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_p)$ une liste exhaustive et sans répétition de toutes les orbites. Justifier :

$$E = \bigsqcup_{k=1}^p \mathcal{O}(x_k) \quad [\text{réunion disjointe}]$$

et en déduire une expression de $\text{card}(E)$ en fonction des cardinaux des orbites $\mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_p)$.

Q23. Nous savons qu'une relation d'équivalence sur E livre une partition de E : celle donnée par les classes d'équivalences. Proposer une relation d'équivalence $\sim$ sur E dont la partition de E associée est celle obtenue à la question précédente.

6.2. Formule des classes

Nous considérons ici un ensemble fini E , muni d'une action de groupe ρ par un groupe fini $(G, *)$ et nous fixons un élément $x \in E$.

Q24. Soit τ l'application définie par :

$$\tau \quad \left| \begin{array}{ll} G & \longrightarrow \mathcal{O}(x) \\ g & \longmapsto g \cdot x . \end{array} \right.$$

Justifier que :

$$G = \bigsqcup_{y \in \mathcal{O}(x)} \tau^{-1}(\{y\}) .$$

Q25. Soit $y \in \mathcal{O}(x)$. Démontrer que les ensembles $\text{Stab}(x)$ et $\tau^{-1}(\{y\})$ sont équipotents.

Q26. En déduire la formule des classes, qui s'énonce comme suit :

$$\text{card}(\mathcal{O}(x)) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(\text{Stab}(x))} .$$

6.3. Théorème de Cauchy

Soient $(\Gamma, *)$ un groupe fini de cardinal n et p un diviseur premier de n . Nous nous proposons de démontrer que :

$$\exists \gamma \in \Gamma \quad \gamma \neq e_\Gamma \quad \text{et} \quad \gamma^p = e_\Gamma$$

où e_Γ désigne le neutre du groupe $(\Gamma, *)$. Il s'agit d'un théorème dû à Cauchy.

Nous introduisons l'ensemble :

$$E := \{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \Gamma^p : \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_p = e_\Gamma\} \subset \Gamma^p.$$

Q27. Démontrer que E est un ensemble fini, de cardinal n^{p-1} .

Soit $c \in \mathfrak{S}_p$ le cycle de longueur p défini par :

$$c := (1 \ 2 \ \dots \ p-1 \ p)$$

de sorte que $c(p) = 1$ et :

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \quad c(i) = i+1.$$

Q28. Démontrer que :

$$G := \{c^k : k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$$

est un sous-groupe du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_p, \circ)$ et que $\text{card}(G) = p$.

Pour tout $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \Gamma^p$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on définit $\sigma \cdot \gamma \in \Gamma^p$ par :

$$\sigma \cdot \gamma := (\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, \dots, \gamma_{\sigma(p)}) \quad [\text{permutation des composantes de } \gamma].$$

Q29. Soit $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in E$. Démontrer que :

$$\forall \sigma \in G \quad \sigma \cdot \gamma \in E.$$

Q30. D'après la question précédente, l'application ρ définie par :

$$\rho \left| \begin{array}{lcl} G \times E & \longrightarrow & E \\ (\sigma, \gamma) & \longmapsto & \sigma \cdot \gamma \end{array} \right.$$

est bien définie. Démontrer qu'elle définit une action du groupe G sur l'ensemble E , i.e. que les propriétés (A1) et (A2) de la partie I sont vérifiées.

Fixons un élément $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in E$.

Q31. Démontrer que $\text{card}(\mathcal{O}(\gamma))$ est égal à 1 ou p .

Q32. Démontrer :

$$\text{card}(\mathcal{O}(\gamma)) = 1 \implies \gamma_1^p = e_\Gamma.$$

Q33. En déduire qu'il existe $\kappa \in \Gamma$ tel que $\kappa \neq e_\Gamma$ et $\kappa^p = e_\Gamma$.



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)