

Un corrigé du devoir maison n°9

adapté d'un document de Rémi Crétois

Dernière visite en 0 d'une marche aléatoire

1. Loi de S_n	2
2. Somme de variables aléatoires et égalité en loi	3
3. Principe de réflexion	4
4. Loi de T_n	4
5. Raffinement de la formule de Stirling	6
6. Une convergence en loi	8

Un point se déplace sur un axe gradué.

Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui est supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note S_n l'abscisse du point à l'issue du n -ième lancer. Ainsi, $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle chemin de longueur n toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0), (1, S_1), \dots, (n, S_n)$.

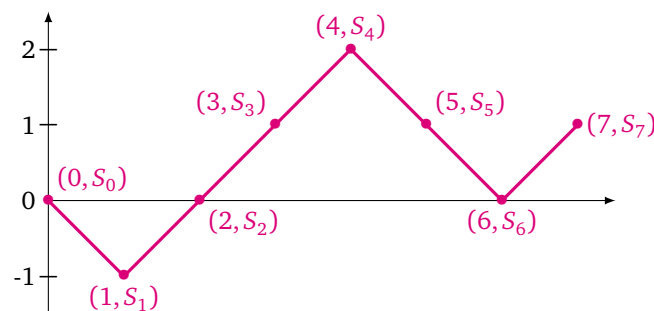


FIGURE 1 – Un chemin de longueur 7

Tous les « chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables, i.e., pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \quad \mathbf{P}([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \dots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n]) = \frac{1}{2^n}.$$

Pour un entier naturel n fixé, on s'intéresse au moment de la dernière visite en 0 de la marche aléatoire au cours des n premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire T_n définie par :

$$T_n = \max \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid S_k = 0\}.$$

1. Loi de S_n

Soient n et x des entiers naturels tels que $n \neq 0$ et $x \neq 0$.

On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0,0)$ au point (n,x) .

Q1 Vérifier que si $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ et $n - x$ est un entier pair alors :

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n+x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

Remarquons que le nombre cherché est :

$$N_{n,x} = \text{card} \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n : \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = x \right\}.$$

Si $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$, pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, en notant $m = \text{card}\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \varepsilon_i = -1\}$, on a :

$$n - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n - (n - m - m) = 2m$$

qui est pair.

Donc si $n - x$ est impair, $N_{n,x} = 0$.

De plus, pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \in \llbracket -n, n \rrbracket$, donc si $x \notin \llbracket -n, n \rrbracket$, $N_{n,x} = 0$.

Enfin, supposons que $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ et que $n - x$ est pair.

Pour choisir un n -uplet d'éléments de $\{-1, 1\}$ dont la somme fait $x \in \mathbb{N}^*$, il faut et il suffit de choisir $x + \frac{n-x}{2} = a$ coordonnées qui valent 1 et toutes les autres (il y en a $\frac{n-x}{2}$) valent -1 .

Donc $N_{n,x} = \binom{n}{a}$.

Q2 En déduire $\mathbf{P}(S_n = x)$.

Comme dit dans l'énoncé, tous les chemins sont équiprobables de probabilité $\frac{1}{2^n}$, on a compté les chemins qui mènent à $(S_n = x)$ donc :

- $\mathbf{P}(S_n = x) = \binom{n}{a} \frac{1}{2^n}$ si $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ et $n - x$ est pair ;
- $\mathbf{P}(S_n = x) = 0$ sinon.

Q3 Retrouver la loi de S_n en introduisant une variable aléatoire de loi binomiale.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire $B_k = (X_k + 1)/2$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, les variables $B_1, \dots, B_n$ sont également mutuellement indépendantes.

D'après le cours $\sum_{k=1}^n B_k \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.

De plus $S_n = 2B_n - n$.

En particulier, S_n prend des valeurs $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ telles que $n + x$ est pair (ou de façon équivalente $n - x$ est pair).

Pour un tel x , $\mathbf{P}(S_n = x) = \mathbf{P}(B_n = a) = \binom{n}{a} \frac{1}{2^n}$, où $a = \frac{n+x}{2}$.

2. Somme de variables aléatoires et égalité en loi

Q4 Soient X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé. Si $X_1 \sim Y_1$ et $X_2 \sim Y_2$, a-t-on nécessairement $X_1 + X_2 \sim Y_1 + Y_2$?

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et de même loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Alors :

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad X_1 + X_1 \sim \mathcal{U}(\{0, 2\}) .$$

La réponse à la question posée est donc « non ».

Q5 Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et suivant toutes la même loi. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^n Y_i$ suivent la même loi.

Comme toutes les variables $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ ont même loi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n(\Omega) = Y_1(\Omega)$. Soient un entier $n \geq 2$ et k un entier compris entre 1 et $n-1$.

Les variables $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^n Y_i$ prennent toutes deux leurs valeurs dans :

$$A := \{y_1 + \dots + y_{n-k} : (y_1, \dots, y_{n-k}) \in Y_1(\Omega)^{n-k}\} .$$

Soit $s \in A$.

Si on pose :

$$B_s := \{(y_1, \dots, y_{n-k}) \in Y_1(\Omega)^{n-k} : y_1 + \dots + y_{n-k} = s\}$$

alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n-k} Y_i = s\right) = \bigsqcup_{(y_1, \dots, y_{n-k}) \in B_s} (Y_1 = y_1) \cap \dots \cap (Y_{n-k} = y_{n-k}) .$$

Par σ -additivité de $\mathbf{P}$, il vient :

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n-k} Y_i = s\right) = \sum_{(y_1, \dots, y_{n-k}) \in B_s} \mathbf{P}((Y_1 = y_1) \cap \dots \cap (Y_{n-k} = y_{n-k})) .$$

Comme les variables $Y_1, \dots, Y_{n-k}$ sont mutuellement indépendantes, l'identité précédente livre :

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n-k} Y_i = s\right) = \sum_{(y_1, \dots, y_{n-k}) \in B_s} \mathbf{P}((Y_1 = y_1) \times \dots \times \mathbf{P}(Y_{n-k} = y_{n-k})) .$$

Les variables $Y_1, \dots, Y_{n-k}$ ayant toutes même loi que Y_1 , nous en déduisons :

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n-k} Y_i = s\right) = \sum_{(y_1, \dots, y_{n-k}) \in B_s} \mathbf{P}((Y_1 = y_1) \times \dots \times \mathbf{P}(Y_1 = y_{n-k})) \quad [\text{somme ne dépendant que de } Y_1 \text{ et de } s] .$$

De manière analogue, on démontre que :

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=k+1}^n Y_i = s\right) = \sum_{(y_1, \dots, y_{n-k}) \in B_s} \mathbf{P}((Y_1 = y_1) \times \dots \times \mathbf{P}(Y_1 = y_{n-k}))$$

ce qui permet de conclure.

3. Principe de réflexion

Soient n , x et y des entiers naturels tels que $n \neq 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Q6 Démontrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à (n, y) , tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à (n, y) .

On a une bijection entre les chemins du premier et deuxième type.

À chaque chemin reliant $(0, x)$ à (n, y) passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, on associe le chemin obtenu à partir de celui-ci en prenant la réflexion par rapport à l'axe des abscisses de la portion joignant $(0, x)$ au premier point d'ordonnée 0.

Réciproquement, un chemin de $(0, -x)$ à (n, y) passe forcément par au moins un point d'ordonnée 0 (car $x, y \in \mathbb{N}^*$) et on réalise la même réflexion.

4. Loi de T_n

Soient n et x des entiers naturels tels que $n \neq 0$ et $x \neq 0$.

Q7 Démontrer que T_n est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que la suite de variables aléatoires $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par définition, $T_n(\Omega) \subset \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$. On remarque que :

$$[T_n = k] = [S_k = 0] \cap [S_{k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_n \neq 0].$$

Comme S_n est une variable aléatoire, toutes les parties $[S_k = 0], [S_{k+1} \neq 0], \dots, [S_n \neq 0]$ de Ω sont des événements.

Comme une tribu est stable par intersection finie, $[T_n = k] \in \mathcal{A}$.

Q8 En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à :

$$N_{n-1, x-1} - N_{n-1, x+1}.$$

En effectuant la translation de vecteur $(-1, -1)$, le nombre total de chemins joignant $(1, 1)$ à (n, x) est égal à $N_{n-1, x-1}$.

D'autre part, en effectuant la translation de vecteur $(-1, 0)$, le nombre de chemins joignant $(1, 1)$ à (n, x) en passant au moins une fois par l'axe des abscisses est égal au nombre de chemins de $(0, 1)$ à $(n-1, x)$ passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0 et donc d'après la question précédente, il est égal au nombre de chemins quelconques de $(-1, 0)$ à $(n-1, x)$ qui est égal à $N_{n-1, x+1}$ en faisant la translation de vecteur $(0, 1)$.

Donc le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses vaut $N_{n-1, x-1} - N_{n-1, x+1}$.

Q9 En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]) = \frac{1}{2} (\mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k-1) - \mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k+1)).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

L'événement $(S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)$ correspond aux chemins passant par $(0, 0)$, $(1, 1)$ puis joignant $(2n, 2k)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses.

Il y en a $N_{2n-1, 2k-1} - N_{2n-1, 2k+1}$ qui sont tous équiprobables de probabilité $\frac{1}{2^{2n}}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} N_{2n-1, 2k-1} - \frac{1}{2^{2n-1}} N_{2n-1, 2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k-1) - \mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k+1)) \end{aligned}$$

d'après la question Q2.

Q10 Démontrer que :

$$\mathbf{P}([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$$

puis que :

$$\mathbf{P}([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0) .$$

Comme S_{2n} ne prend que des valeurs paires, $(S_{2n} > 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (S_{2n} = 2k)$, les événements étant impossibles pour $k > n$.

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((S_1 > 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} > 0)) &= \mathbf{P}\left((S_1 > 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap \bigcup_{k=1}^{+\infty} (S_{2n} = 2k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}((S_1 > 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k-1) - \mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k+1) \end{aligned}$$

En télescopant et en utilisant que pour $k > n$, $\mathbf{P}(S_{2n} = 2k) = 0$, on trouve donc :

$$\mathbf{P}((S_1 > 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} > 0)) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(S_{2n} = 0) .$$

En utilisant le principe de réflexion :

$$\mathbf{P}((S_1 > 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} > 0)) = \mathbf{P}((S_1 < 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} < 0) \cap (S_{2n} < 0))$$

donc :

$$\mathbf{P}((S_1 \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} \neq 0) \cap (S_{2n} \neq 0)) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0) .$$

Q11 Démontrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbf{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbf{P}([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]) .$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Par définition :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_{2n} = 2k) &= \mathbf{P}((S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2n} \neq 0)) \\ &= \mathbf{P}((S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} - S_{2k} \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2n} - S_{2k} \neq 0)) . \end{aligned}$$

Or pour tout $j \in \llbracket 1, 2n - 2k \rrbracket$:

$$S_{2k+j} - S_{2k} = \sum_{i=2k+1}^{2k+j} X_i$$

donc $(S_{2k+1} - S_{2k} \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2n} - S_{2k} \neq 0)$ et $(S_{2k} = 0)$ sont indépendants.

De plus, d'après Q5, $\sum_{i=2k+1}^{2k+j} X_i$ et S_j ont la même loi, donc :

$$\mathbf{P}((S_{2k+1} \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2n} \neq 0)) = \mathbf{P}((S_1 \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-2k} \neq 0)) .$$

Ainsi :

$$\mathbf{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbf{P}([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]) .$$

Q12 En déduire que pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbf{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n}.$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La question **Q2** donne :

$$\mathbf{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \binom{1}{2^{2k}} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(S_{2n-2k} = 0) = \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2n-2k}}.$$

La question **Q9** donne alors :

$$\mathbf{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k} \binom{1}{2^{2k}} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2n-2k}} = \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n}.$$

5. Raffinement de la formule de Stirling

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$.

Q13 Démontrer que la série numérique $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ converge.

La série $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ est télescopique. Sa convergence équivaut donc à la convergence de la suite $(\ln(a_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$.

D'après la formule de Stirling, $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, donc :

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}.$$

Par continuité de la fonction $\ln$ au point $\sqrt{2\pi}$, il vient :

$$\ln(a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ln(\sqrt{2\pi}) = \frac{\ln(2\pi)}{2}.$$

Nous en déduisons que la série $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n) - \ln(a_1) = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

Q14 En déduire que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

• Réduction du problème à deux calculs d'équivalents. — Supposons que :

$$(*) \quad \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2} < 0.$$

Comme la série $\sum 1/n^2$ converge, le théorème de sommation des équivalents nous livre :

$$\ln(\sqrt{2\pi}) - \ln(a_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{12k^2}.$$

Supposons de plus que :

$$(**) \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Alors :

$$\ln(\sqrt{2\pi}) - \ln(a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n}$$

i.e. :

$$\ln\left(\frac{a_n}{\sqrt{2\pi n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En composant par la fonction exponentielle, nous obtenons :

$$\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{a_n}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Puisque $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il vient :

$$\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

qui est le résultat demandé.

Il suffit donc d'établir (*) et (**) pour résoudre la question.

- Calcul d'un équivalent de $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}} \frac{n^n \sqrt{n}}{n! e^n} \\ &= e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2} \\ &= e \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-1/2} \\ &= e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1/2} \\ &= e \times \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \times \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \times \exp\left(-1 - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \times e^{-1} \times \exp\left(-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

En composant par la fonction logarithme, nous obtenons :

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}.$$

- Calcul d'un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. — Nous savons que la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, ce qui légitime de considérer ses restes.

Nous allons appliquer une comparaison série-intégrale, technique classique pour déterminer un équivalent d'un reste de série de Riemann convergente.

La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.

Donc, pour tout entier $k \geq 2$:

$$(*) \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx.$$

Fixons un entier $n \geq 2$, puis un entier N tel que $n \leq N$.

En sommant les inégalités (*) pour k variant de n à N , il vient :

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^N \frac{1}{x^2} dx$$

i.e. :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N}.$$

Les trois termes de l'inégalité précédente possèdent une limite finie, lorsque N tend vers $+\infty$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, arrive :

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}.$$

Comme $\frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, nous en déduisons que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

6. Une convergence en loi

Soient α et β deux nombres réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$.

Q15 On définit la fonction f par :

$$f \left\{ \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[\\ f(\beta) & \text{si } t \in]\beta, 1]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Démontrer que :

$$\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt.$$

On remarque que f est continue sur $[0, 1]$, donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Or pour tout $k \leq \lfloor n\alpha \rfloor \leq n\alpha$, on a $\frac{k}{n} \leq \alpha$, donc $f(k/n) = f(\alpha)$.

De même pour $k \geq \lfloor n\beta \rfloor + 1 \geq n\beta$, on a $\frac{k}{n} \geq \beta$ et $f(k/n) = f(\beta)$.

Ainsi :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor n\alpha \rfloor} f(k/n) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} f(k/n) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\beta \rfloor + 1}^n f(k/n) = \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} f(\alpha) + \frac{n - \lfloor n\beta \rfloor}{n} f(\beta) + \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \leq \alpha$$

donc $\frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ et de même $\frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$.

D'où :

$$\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt - \alpha f(\alpha) - (1-\beta)f(\beta).$$

Comme f est constante sur $[0, \alpha]$ et sur $[\beta, 1]$:

$$\int_0^\alpha f(t) dt = \alpha f(\alpha) \quad \text{et} \quad \int_\beta^1 f(t) dt = (1-\beta)f(\beta)$$

et

$$\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^\beta f(t) dt.$$

Q16 Démontrer que :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} - \frac{4^n}{8n\sqrt{n\pi}} + o\left(\frac{4^n}{8n\sqrt{n\pi}}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $\varepsilon_n = 8n \left(1 - \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \binom{2n}{n}\right)$ et vérifions que $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. En utilisant le raffinement de la formule de Stirling (Q14) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 8n \left(1 - \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \frac{2\sqrt{n\pi} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \left(1 + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 8n \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 8n \left(1 - \left(1 + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - 2\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 8n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 8n \left(\frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1). \end{aligned}$$

On a donc bien $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Q17 En déduire que :

$$\left(\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On utilise la question précédente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{4^k}{\sqrt{k}\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{8k}\right) \frac{4^{n-k}}{\sqrt{(n-k)\pi}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{8k}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right). \end{aligned}$$

Soit $1 > \varepsilon > 0$.

Comme $\frac{\varepsilon_n}{8n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, prenons $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $0 < 1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{\varepsilon_n}{8n} \leq 1 + \varepsilon$.

Comme $\lfloor n\alpha \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $n - \lfloor n\beta \rfloor \geq n(1-\beta) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, soit $N' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$,

$\min(\lfloor n\alpha \rfloor, n - \lfloor n\beta \rfloor) \geq N$. Alors pour tout $n \geq N'$, et tout $k \in \llbracket \lfloor n\alpha \rfloor + 1, \lfloor n\beta \rfloor \rrbracket$:

$$(1 - \varepsilon)^2 \leq \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{8k}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right) \leq (1 + \varepsilon)^2$$

et ainsi ;

$$\left| \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{8k}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right) - 1 \right| \leq \varepsilon(2 + \varepsilon) \leq 3\varepsilon$$

d'où :

$$\left| \frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \right| \leq 3\varepsilon \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

La suite $\left(\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \geq N'$:

$$\left| \frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \right| \leq M\varepsilon.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Q18 Montrer alors que :

$$\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha}) \right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$m_n = \begin{cases} \lfloor n\alpha \rfloor + 1 & \text{si } n\alpha + \frac{1}{2} \leq \lfloor n\alpha \rfloor + 1 \\ \lfloor n\alpha \rfloor + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie alors que :

$$2k \in \llbracket \lfloor 2n\alpha \rfloor + 1, \lfloor 2n\beta \rfloor \rrbracket \iff k \in \llbracket m_n, \lfloor n\beta \rfloor \rrbracket.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = (T_{2n} \in [2n\alpha, 2n\beta]) = (T_{2n} \in \llbracket \lfloor 2n\alpha \rfloor + 1, \lfloor 2n\beta \rfloor \rrbracket) = \bigcup_{k=m_n}^{\lfloor n\beta \rfloor} (T_{2n} = 2k).$$

D'après **Q12** :

$$\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \sum_{k=m_n}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n}$$

et d'après les questions **Q17** et **Q15**, et en utilisant le fait que $\mathbf{P}(T_{2n} = m_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on trouve :

$$\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt.$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale en posant $t = u^2$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{2}{\sqrt{1-u^2}} du = 2[\arcsin(u)]_{\alpha}^{\beta}.$$

Ainsi :

$$\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha}) \right).$$