

Un corrigé du devoir maison n°8

rédigé par Gilbert Roux

Comparaison de modes de convergence (CCINP MP 2012)

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles.

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux questions suivantes on supposera que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I .

1. Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I .

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge sur $\mathbf{R}_+$, où $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in I\}$.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I .

Pour tout $x \in I$:

$$0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I , la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument.

3. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I . On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

Pour x dans I , notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors :

$$\forall x \in I \quad |R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty.$$

Par passage au sup :

$$\|R_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty.$$

La série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 indépendamment de x , ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I , i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

On pose pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$.

4. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0, 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0, 1]$.

Soit $x \in [0, 1]$ fixé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x)f_n(x) \leq 0$.

De plus, la suite $\left(|f_n(x)| = \frac{x^2}{n} + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît et converge vers 0.

Le critère des séries alternées est applicable, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0, 1]$.

Le critère des séries alternées nous dit en outre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I \quad |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Par passage au sup :

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par théorème de domination, la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0, 1]$.

Enfin, pour x fixé, $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge, i.e. la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I .

5. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I , a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \mid \begin{array}{l} [0, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^n. \end{array}$$

Pour x dans I , la série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-x}$.

Cette série $\sum f_n$ converge absolument sur $I = [0, 1[$.

Nous calculons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

La suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet :

$$R_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = n e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n})} = n e^{(n+1)(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0 et ainsi la série $\sum f_n$ est une série qui converge absolument sur $I = [0, 1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur I .

Dans la suite, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0; 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)$.

6. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I .

La suite (α_n) décroît et est positive, donc :

$$\forall n, 0 \leq \alpha_n \leq \alpha_0.$$

La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.

Soit $x \in I$.

La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison x avec $0 \leq x < 1$) et donc la série $\sum \alpha_0(1-x)x^n$ converge (linéarité).

De plus :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in I \quad 0 \leq \alpha_n x^n (1-x) \leq \alpha_0 (1-x) x^n.$$

Ainsi, par domination de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I .

7. Calculer pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in I$:

$$f'_n(x) = \alpha_n (n x^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1} (n - x(n+1)).$$

En construisant le tableau de variations de f_n , on établit que la fonction f_n positive admet sur I un maximum (absolu) au point $\frac{n}{n+1}$ qui vaut :

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

$$\text{Donc } \|f_n\|_\infty = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

8. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

D'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \|f_n\|_\infty = \frac{\alpha_n}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Or :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$$

et

$$(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1)\left(-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1.$$

Donc $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$. Ainsi :

$$\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha_n}{ne}.$$

Par comparaison de séries positives, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge si et seulement si la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

9. Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

Pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

10. Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I . On pourra observer que pour $k \geq n+1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.

On sait que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ décroît.

Donc pour :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall k \geq n+1 \quad \alpha_k \leq \alpha_{n+1}.$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall k \geq n+1 \quad \forall x \in I \quad \alpha_k x^k (1-x) \leq \alpha_{n+1} (1-x) x^k$$

et donc par inégalités sur les séries convergentes, il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in I$:

$$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \leq \alpha_{n+1} (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1} (1-x) \frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1} x^{n+1} \leq \alpha_{n+1}.$$

Par passage au sup :

$$\|R_n\|_{\infty} \leq \alpha_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par théorème d'encadrement, la série $\sum f_n$ converge uniformément.

11. Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

La suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle, d'après le théorème de la limite monotone.

Si cette limite ℓ est non nulle, alors pour tout n , $\alpha_n \geq \ell > 0$.

Dans ces conditions :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in I \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \geq \ell (1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}.$$

Mais alors :

$$R_n \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \geq \ell \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{e}$$

donc la suite $(R_n(1 + \frac{1}{n+1}))_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0, c'est à dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I , si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

12. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :

- (a) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I ;

- (b) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I ;
- (c) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .

(a) Si l'on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, la question 8 montre que la série $\sum f_n$ converge normalement, car, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

(b) Il suffit de poser, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n = 1$.

La suite est constante, donc elle décroît (au sens large) et elle ne converge pas vers 0.

Si on veut absolument une suite strictement décroissante, il suffit de prendre celle définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.

(c) Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ positive décroissante, convergeant vers 0, mais telle que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.

La suite définie par, pour tout $n \geq 2$, $\alpha_n = \frac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geq 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient.

Cette suite est décroissante et converge vers 0. Il reste à montrer que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.

La fonction :

$$g: x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$$

décroît sur $[2, +\infty[$ et est positive (produit de deux fonctions positives décroissantes).

La série $\sum_{n \geq 2} g(n)$ est donc de même nature que l'intégrale $\int_2^\infty g(x) dx$.

Or, pour tout $A \geq 2$:

$$\int_2^A g(x) dx = \int_2^A \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln(\ln x)]_2^A = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2)$$

qui a pour limite $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$.

L'intégrale diverge, donc la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge, et donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .

13. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I .

- CV Normale $\Rightarrow$ CV Absolue et CV Absolue $\Rightarrow$ CV simple.
Aucune des réciproques n'est vraie.
- CV Normale $\Rightarrow$ CV Uniforme et CV Uniforme $\Rightarrow$ CV simple.
Aucune des réciproques n'est vraie.
- De plus, CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme et de même CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue.