

Un corrigé du devoir maison n°8★

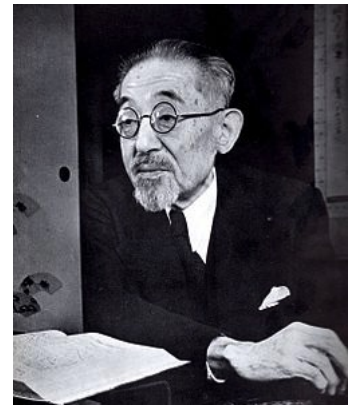
Fonctions continues nulle part dérivables

1. Présentation du sujet	1
2. La fonction distance à $\mathbf{Z}$	1
3. Définition et périodicité la fonction de Takagi	4
4. Continuité de la fonction de Takagi	5
5. La fonction de Takagi est nulle part dérivable	6
6. Densité de l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables	11

1. Présentation du sujet

L'objectif de ce problème est de construire une fonction continue sur $[0, 1]$, nulle part dérivable sur $[0, 1]$. Ensuite on établit que ces fonctions, étranges de prime abord, abondent dans la nature, puisqu'elles forment une partie dense de $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Le cœur du travail porte sur l'étude d'une fonction définie par Teiji Takagi en 1903 dans son article *A simple example of the continuous function without derivative*, initialement paru dans les Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, ser II, Vol 1. 1903, pp 176-177, puis dans les Collected Papers of Teiji Takagi (S. Iyanaga, Ed), Springer Verlag, New York 1990.



Teiji Takagi (1875-1960)

2. La fonction distance à $\mathbf{Z}$

Nous définissons la fonction φ par :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto d(x, \mathbf{Z}) := \inf \{ |x - n| : n \in \mathbf{Z} \} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction φ est 1-lipschitzienne.

Soient x et y des nombres réels. Nous démontrons : $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$.

• Soit $n \in \mathbf{Z}$. Nous observons :

$$\varphi(x) \leq |x - n| \leq |x - y| + |y - n|$$

d'où :

$$\underbrace{\varphi(x) - |x - y|}_{\text{indépendant de } n} \leq |y - n|.$$

Par passage à l'inf sur $n \in \mathbf{Z}$, il vient :

$$\varphi(x) - |x - y| \leq \varphi(y)$$

puis :

$$(*) \quad \varphi(x) - \varphi(y) \leq |x - y|.$$

- Par symétrie des rôles joués par x et y , nous déduisons de $(\star)$:

$$(\star\star) \quad \varphi(y) - \varphi(x) \leq |y - x| = |x - y|.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit : $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$.

2. Démontrer que la fonction φ est paire.

- L'ensemble $\mathbf{R}$ est symétrique par rapport à 0.
- L'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & -n \end{array} \right.$$

est une permutation de l'ensemble $\mathbf{Z}$, d'où l'égalité d'ensembles :

$$E_x := \{|x - n| : n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \underbrace{|x - (-n)|}_{=|-x-n|} : n \in \mathbf{Z} \right\} =: E_{-x}.$$

A fortiori, $\varphi(x) := \inf E_x = \inf E_{-x} = \varphi(-x)$.

3. Démontrer que la fonction φ est 1-périodique.

- L'ensemble $\mathbf{R}$ est stable par la fonction $x \mapsto x + 1$.
- L'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & n + 1 \end{array} \right.$$

est une permutation de l'ensemble $\mathbf{Z}$, d'où l'égalité d'ensembles :

$$E_{x+1} := \{|x + 1 - n| : n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \underbrace{|x + 1 - (n + 1)|}_{=|x-n|} : n \in \mathbf{Z} \right\} =: E_x.$$

A fortiori, $\varphi(x + 1) := \inf E_{x+1} = \inf E_x = \varphi(x)$.

4. Démontrer que $\varphi(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1/2]$.

Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- Nous calculons $|x - 0| = x$.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $n \geq 1$:

$$-n \leq x - n \leq \frac{1}{2} - n \leq -\frac{1}{2}$$

et il vient $|x - n| \geq \frac{1}{2} \geq x = |x - 0|$.

- Soit $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq -1$. Comme $n \leq -1$:

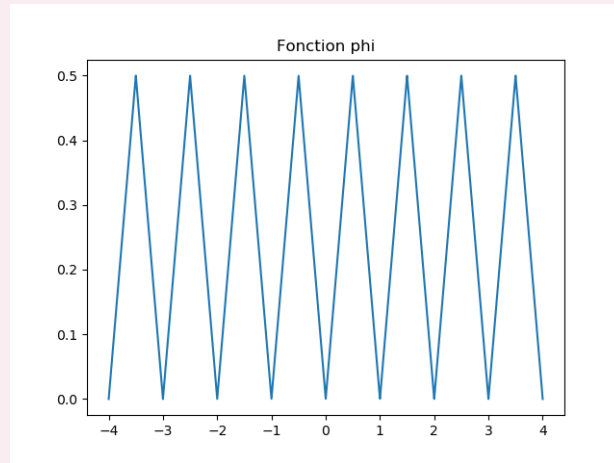
$$1 \leq -n \leq x - n \leq \frac{1}{2} - n$$

et il vient $|x - n| \geq 1 \geq x = |x - 0|$.

Des trois points précédents, nous déduisons :

$$\varphi(x) := \inf \{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\} = |x - 0| = x.$$

5. Tracer la représentation graphique de la fonction φ au-dessus de l'intervalle $[-4, 4]$.



6. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \leq 1/2 \\ \lfloor x \rfloor + 1 - x & \text{si } x - \lfloor x \rfloor > 1/2. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$.

- 1^{er} cas : $0 \leq x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{2}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x - \lfloor x \rfloor) && [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= x - \lfloor x \rfloor && \left[x - \lfloor x \rfloor \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right]. \end{aligned}$$

- 2^{ème} cas : $\frac{1}{2} < x - \lfloor x \rfloor$. D'après la définition de la partie entière, nous avons de plus :

$$\frac{1}{2} < x - \lfloor x \rfloor < 1$$

d'où $-\frac{1}{2} < x - \lfloor x \rfloor - 1 < 0$, puis :

$$0 < \lfloor x \rfloor + 1 - x < \frac{1}{2}.$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x - \lfloor x \rfloor - 1) && [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= \varphi(\lfloor x \rfloor + 1 - x) && [\varphi \text{ est paire}] \\ &= \lfloor x \rfloor + 1 - x && \left[\lfloor x \rfloor + 1 - x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right]. \end{aligned}$$

7. Démontrer que la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$ et calculer $\|\varphi\|_\infty$.

Nous remarquons :

$$\begin{aligned} \{|\varphi(x)| : x \in \mathbf{R}\} &= \left\{|\varphi(x)| : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\} \quad [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= \left\{|\varphi(x)| : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} \quad [\varphi \text{ est paire}] \\ &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \left[\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \varphi(x) = x\right]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad |\varphi(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$ et :

$$\|\varphi\|_\infty := \sup \{|\varphi(x)| : x \in \mathbf{R}\} = \sup \left[0, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

3. Définition et périodicité la fonction de Takagi

Nous introduisons la fonction due à Teiji Takagi :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \end{array} \right.$$

8. Démontrer que cette fonction f est bien définie.

- Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_k par :

$$f_k \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \end{array} \right.$$

- Il s'agit ici de démontrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Nous démontrons une propriété plus forte : la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.
- Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$, la fonction f_k est également bornée sur $\mathbf{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad |f_k(x)| = \left| \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{2^k} = \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{\text{indépendant de } x}.$$

Par passage au sup :

$$0 \leq \|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

D'après le cours sur les séries géométriques et le théorème de domination pour les séries à termes positifs ou nuls, la série numérique $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_\infty$ converge.

9. Démontrer que la fonction f est 1-périodique.

- L'ensemble $\mathbf{R}$ est stable par la fonction $x \mapsto x + 1$.
- Soit $x \in \mathbf{R}$.
 - Comme la fonction φ est 1-périodique, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

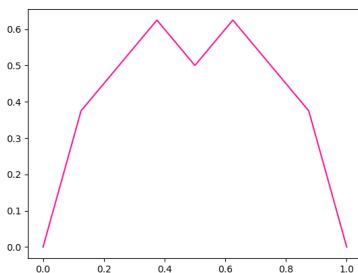
$$f_k(x+1) = \frac{\varphi(2^k(x+1))}{2^k} = \frac{\varphi(2^k x + 2^k)}{2^k} = \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} = f_k(x).$$

— Nous en déduisons que :

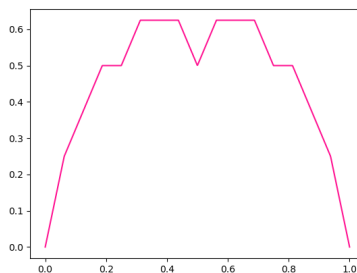
$$f(x+1) := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) =: f(x).$$

Ci-dessous, sont esquissées des courbes de fonctions qui approximent la fonction f sur $[0, 1]$.

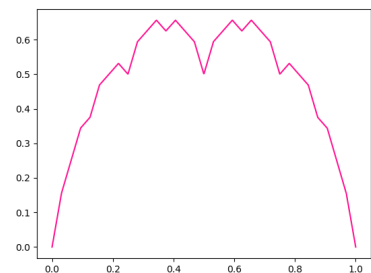
$$x \mapsto \sum_{k=0}^2 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



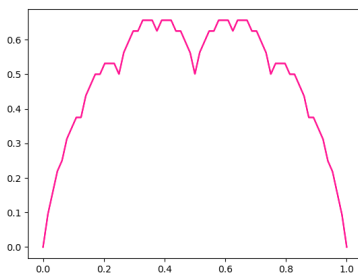
$$x \mapsto \sum_{k=0}^3 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



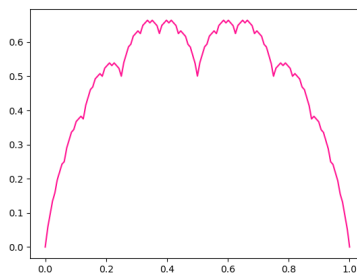
$$x \mapsto \sum_{k=0}^4 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



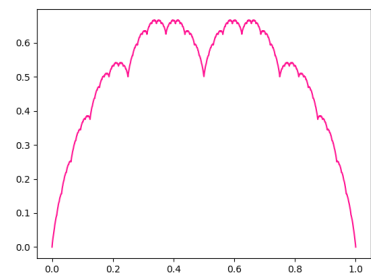
$$x \mapsto \sum_{k=0}^5 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



$$x \mapsto \sum_{k=0}^6 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



$$x \mapsto \sum_{k=0}^{100} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



4. Continuité de la fonction de Takagi

On rappelle le résultat suivant, démontré dans le cadre d'un exercice et qui figurera dans le chapitre « Suites et séries de fonctions 2 ».

Théorème. — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(g_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$.
 On suppose que toutes les fonctions g_n ($n \in \mathbf{N}$) sont continues sur I et que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction g sur I .
 Alors la fonction g est continue sur I .

10. Énoncer une version du théorème précédent pour les séries de fonctions, en justifiant le résultat.

- **Énoncé.** — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(h_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})^{\mathbf{N}}$.
 On suppose que toutes les fonctions h_n ($n \in \mathbf{N}$) sont continues sur I et que la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur I .

Alors la fonction :

$$S \left| \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(x) \end{array} \right.$$

est continue sur I .

- **Justification.** — Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme les $(n+1)$ fonctions $h_0, \dots, h_n$ sont continues sur I , la fonction :

$$S_n := \sum_{k=0}^n h_k \left| \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \sum_{k=0}^n h_k(x) \end{array} \right.$$

est continue sur I (combinaison linéaire de fonctions continues, en nombre fini).

Ainsi :

- toutes les fonctions S_n ($n \in \mathbf{N}$) sont continues sur I ;
- la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction S sur I (définition de la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum h_n$ sur I).

Nous déduisons du théorème rappelé dans l'énoncé que la fonction S est continue sur I .

11. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

- Comme la fonction φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$ (Q1), elle est continue sur $\mathbf{R}$. Nous en déduisons que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction f_k est continue sur $\mathbf{R}$.
- Nous savons que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ (Q8). Elle y converge donc uniformément.
- Des deux points précédents, nous déduisons que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

5. La fonction de Takagi est nulle part dérivable

On souhaite démontrer que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un nombre réel x en lequel la fonction f est dérivable.

12. Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq x < b_n \quad ; \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \quad ; \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x .$$

Démontrer :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(x).$$

- Comme f est dérivable en x , la fonction

$$\varepsilon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ h \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \quad \text{si } h \neq 0 \\ 0 \quad \text{si } h = 0 \end{array} \right.$$

est continue en 0 et vérifie :

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + (y - x)\varepsilon(y - x).$$

- On a donc :

$$f(b_n) = f(x) + f'(x)(b_n - x) + (b_n - x)\varepsilon(b_n - x)$$

et :

$$f(a_n) = f(x) + f'(x)(a_n - x) + (a_n - x)\varepsilon(a_n - x).$$

Nous en déduisons

$$f(b_n) - f(a_n) = f'(x)(b_n - a_n) + (b_n - x)\varepsilon(b_n - x) - (a_n - x)\varepsilon(a_n - x).$$

puis :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x) + \underbrace{\frac{b_n - x}{b_n - a_n} \varepsilon(b_n - x)}_{\beta_n} - \underbrace{\frac{a_n - x}{b_n - a_n} \varepsilon(a_n - x)}_{\alpha_n}.$$

Le résultat demandé est conséquence de $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $a_n \leq x < b_n$:

$$0 \leq x - a_n < b_n - a_n$$

puis, comme $b_n - a_n > 0$:

$$0 \leq \frac{x - a_n}{b_n - a_n} < 1$$

d'où :

$$\left| \frac{a_n - x}{b_n - a_n} \right| \leq 1.$$

Nous en déduisons :

$$0 \leq |\alpha_n| \leq \left| \frac{a_n - x}{b_n - a_n} \right| |\varepsilon(a_n - x)| \leq |\varepsilon(a_n - x)|.$$

Comme $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et ε est continue en 0 :

$$|\varepsilon(a_n - x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\varepsilon(0)| = 0.$$

Par théorème d'encadrement, $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $a_n \leq x < b_n$:

$$a_n - b_n \leq x - b_n < 0$$

puis, comme $a_n - b_n < 0$:

$$1 \geq \frac{x - b_n}{a_n - b_n} > 0$$

d'où :

$$\left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| \leq 1 .$$

Nous en déduisons :

$$0 \leq |\beta_n| \leq \left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| |\varepsilon(b_n - x)| \leq |\varepsilon(b_n - x)| .$$

Comme $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et ε est continue en 0 :

$$|\varepsilon(b_n - x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\varepsilon(0)| = 0 .$$

Par théorème d'encadrement, $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un unique $j_n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$a_n := \frac{j_n}{2^n} \leq x < \frac{j_n + 1}{2^n} =: b_n$$

puis démontrer que les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers x .

- Soit $j \in \mathbb{Z}$. Nous observons :

$$\frac{j}{2^n} \leq x < \frac{j+1}{2^n} \iff j \leq 2^n x < j+1 .$$

D'après le cours sur la partie entière, il existe un unique entier relatif j satisfaisant cette dernière double inégalité, à savoir la partie entière de $2^n x$. Ainsi $j_n := \lfloor 2^n x \rfloor$ est l'unique entier recherché.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{2^n} .$$

Par théorème d'encadrement, $x - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n + \frac{1}{2^n}$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$f\left(\frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right) .$$

Comme :

$$(*) \quad f\left(\frac{j}{2^n}\right) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(2^{k-n}j)}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi(2^{k-n}j)}{2^k} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varphi(2^{k-n}j)}{2^k}.$$

Comme, pour tout $k \geq n$, $2^{k-n}j \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(2^{k-n}j) = \varphi(0) = 0 \quad [\varphi \text{ est 1-périodique (Q3) et nulle en 0 (Q4)}]$$

d'où :

$$(**) \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varphi(2^{k-n}j)}{2^k} = 0.$$

D'après (*) et (**):

$$f\left(\frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi(2^{k-n}j)}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right).$$

15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Démontrer :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} \in \{-1, 1\}.$$

On pourra poser $q_{n,k} := \lfloor 2a_n 2^k \rfloor$, démontrer que $2b_n 2^k \in [q_{n,k}, q_{n,k} + 1]$, puis exploiter des propriétés de la fonction φ en distinguant deux cas suivant la parité de l'entier $q_{n,k}$.

- Effectuons la division euclidienne de l'entier j_n par l'entier 2^{n-k-1} . Il existe un unique couple d'entiers $(q_{n,k}, r_{n,k})$ tels que :

$$j_n = q_{n,k} 2^{n-k-1} + r_{n,k} \quad \text{et} \quad 0 \leq r_{n,k} \leq 2^{n-k-1} - 1.$$

Nous en déduisons :

$$2a_n 2^k = 2 \frac{j_n}{2^n} 2^k = j_n 2^{k+1-n} = q_{n,k} + r_{n,k} 2^{k+1-n} \quad \text{et} \quad 0 \leq r_{n,k} 2^{k+1-n} \leq 1 - 2^{k+1-n}$$

et en particulier $q_{n,k} = \lfloor 2a_n 2^k \rfloor$. Nous avons de plus :

$$2b_n 2^k = 2 \frac{j_n + 1}{2^n} 2^k = 2 \frac{j_n}{2^n} 2^k + 2^{k+1-n} = 2a_n 2^k + 2^{k+1-n}$$

d'où :

$$q_{n,k} \leq 2a_n 2^k \leq 2b_n 2^k = 2a_n 2^k + 2^{k+1-n} = q_{n,k} + r_{n,k} 2^{k+1-n} + 2^{k+1-n} \leq q_{n,k} + 1.$$

Nous déduisons de cette étude que :

$$2a_n 2^k \text{ et } 2b_n 2^k \text{ appartiennent à } [q_{n,k}, q_{n,k} + 1].$$

- Cas où l'entier $q_{n,k}$ est pair. Comme la fonction φ est 1-périodique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} &= \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n 2^k - a_n 2^k} \\ &= \frac{\varphi\left(b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right) - \varphi\left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}{b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} - \left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

D'après le premier point :

$$a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} \text{ et } b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} \text{ appartiennent à } \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Or sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la fonction φ est affine, de pente 1 (Q4). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} = \frac{\varphi\left(b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right) - \varphi\left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}{b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} - \left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)} = 1.$$

- Cas où l'entier $q_{n,k}$ est impair. Comme la fonction φ est 1-périodique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} &= \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n 2^k - a_n 2^k} \\ &= \frac{\varphi\left(b_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right) - \varphi\left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}{b_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2} - \left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

D'après le premier point :

$$a_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2} \text{ et } b_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2} \text{ appartiennent à } \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Or sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, la fonction φ est affine, de pente -1 (Q2 et Q4). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} = \frac{\varphi\left(b_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right) - \varphi\left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}{b_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2} - \left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right)} = -1.$$

16. Dédurre des deux questions précédentes que la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{1}{b_n - a_n} \left(f\left(\frac{j_n + 1}{2^n}\right) - f\left(\frac{j_n}{2^n}\right) \right)$$

Grâce à la question Q14 :

$$\begin{aligned} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} &= \frac{1}{b_n - a_n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j_n + 1}{2^{n-k}}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j_n}{2^{n-k}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{b_n - a_n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k b_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k a_n) \right) \end{aligned}$$

Grâce à la question Q15, il vient :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{n,k}.$$

- Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

D'après le premier point, il s'agit d'une suite d'entiers.

Elle est donc stationnaire, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad \frac{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} - \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = 0.$$

En particulier :

$$\frac{f(b_{N+1}) - f(a_{N+1})}{b_{N+1} - a_{N+1}} - \frac{f(b_N) - f(a_N)}{b_N - a_N} = \underbrace{\sum_{k=0}^N \varepsilon_{N+1,k} + \sum_{k=0}^{N-1} -\varepsilon_{N,k}}_{\text{somme de } 2N+1 \text{ termes}} = 0.$$

Comme $2N+1$ est impair et qu'une somme d'un nombre impair de ± 1 ne peut être nulle, nous obtenons une contradiction.

Ainsi, la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge-t-elle.

17. Conclure quant à la non dérivabilité de f en x .

Nous avons supposé que la fonction f est dérivable en x .

- D'après les questions Q12 et Q13, la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- D'après la question Q16, la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Les deux points précédents sont contradictoires. La fonction f n'est donc pas dérivable en x .

6. Densité de l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables

On considère le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

18. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ continues sur $[0, 1]$, dérivables en aucun point de $[0, 1]$, telle que :

$$g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} g.$$

- La fonction g est continue sur $[0, 1]$.

D'après le théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß, il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\|P_n - g\|_{\infty, [0, 1]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$g_n := P_n + \frac{1}{n} f|_{[0,1]}.$$

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction g_n est continue sur $[0, 1]$ (Q11).
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si la fonction g_n est dérivable en un réel $x \in]0, 1[$, alors la fonction :

$$f|_{[0,1]} = n g_n - n P_n$$

est également dérivable en x (une fonction polynomiale est dérivable en tout point de son ensemble de définition), ce qui n'est pas (Q17).

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En adaptant les arguments qui ont permis d'établir que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$, on peut démontrer que f n'est dérivable à droite (respectivement à gauche) en aucun point de $\mathbf{R}$. On en déduit que la fonction g_n n'est pas dérivable à droite en 0, ni à gauche en 1.
- Des deux points précédents, nous déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction g_n n'est dérivable en aucun point de $[0, 1]$.
- Enfin :

$$0 \leq \|g_n - g\|_{\infty, [0,1]} \leq \|P_n - g\|_{\infty, [0,1]} + \frac{1}{n} \|f|_{[0,1]}\|_{\infty, [0,1]}.$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$\|g_n - g\|_{\infty, [0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$