

Devoir maison n°8★

Fonctions continues nulle part dérivables

1. Présentation du sujet	1
2. La fonction distance à $\mathbf{Z}$	1
3. Définition et périodicité la fonction de Takagi	2
4. Continuité de la fonction de Takagi	2
5. La fonction de Takagi est nulle part dérivable	3
6. Densité de l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables	3

1. Présentation du sujet

L'objectif de ce problème est de construire une fonction continue sur $[0, 1]$, nulle part dérivable sur $[0, 1]$. Ensuite on établit que ces fonctions, étranges de prime abord, abondent dans la nature, puisqu'elles forment une partie dense de $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Le cœur du travail porte sur l'étude d'une fonction définie par Teiji Takagi en 1903 dans son article *A simple example of the continuous function without derivative*, initialement paru dans les Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, ser II, Vol 1. 1903, pp 176-177, puis dans les Collected Papers of Teiji Takagi (S. Iyanaga, Ed), Springer Verlag, New York 1990.



Teiji Takagi (1875-1960)

2. La fonction distance à $\mathbf{Z}$

Nous définissons la fonction φ par :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ d(x, \mathbf{Z}) := \inf \{|x - n| : n \in \mathbf{Z}\} . \end{array}$$

1. Démontrer que la fonction φ est 1-lipschitzienne.
2. Démontrer que la fonction φ est paire.
3. Démontrer que la fonction φ est 1-périodique.
4. Démontrer que $\varphi(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1/2]$.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction φ au-dessus de l'intervalle $[-4, 4]$.
6. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \leq 1/2 \\ \lfloor x \rfloor + 1 - x & \text{si } x - \lfloor x \rfloor > 1/2 . \end{cases}$$

7. Démontrer que la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$ et calculer $\|\varphi\|_\infty$.

3. Définition et périodicité la fonction de Takagi

Nous introduisons la fonction due à Teiji Takagi :

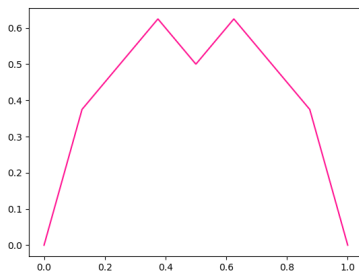
$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} . \end{array} \right.$$

8. Démontrer que cette fonction f est bien définie.

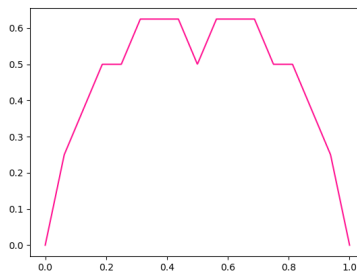
9. Démontrer que la fonction f est 1-périodique.

Ci-dessous, sont esquissées des courbes de fonctions qui approximent la fonction f sur $[0, 1]$.

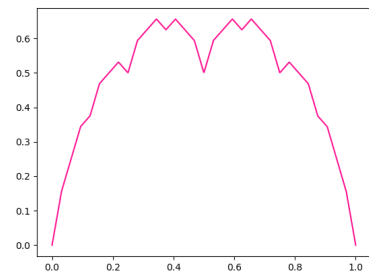
$$x \mapsto \sum_{k=0}^2 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



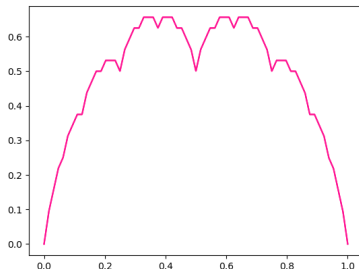
$$x \mapsto \sum_{k=0}^3 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



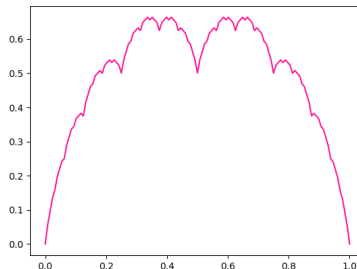
$$x \mapsto \sum_{k=0}^4 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



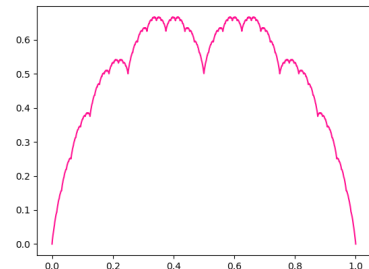
$$x \mapsto \sum_{k=0}^5 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



$$x \mapsto \sum_{k=0}^6 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



$$x \mapsto \sum_{k=0}^{100} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



4. Continuité de la fonction de Takagi

On rappelle le résultat suivant, démontré dans le cadre d'un exercice et qui figurera dans le chapitre « Suites et séries de fonctions 2 ».

Théorème. — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(g_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$.
On suppose que toutes les fonctions g_n ($n \in \mathbf{N}$) sont continues sur I et que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction g sur I .
Alors la fonction g est continue sur I .

10. Énoncer une version du théorème précédent pour les séries de fonctions, en justifiant le résultat.

11. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

5. La fonction de Takagi est nulle part dérivable

On souhaite démontrer que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un nombre réel x en lequel la fonction f est dérivable.

12. Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq x < b_n \quad ; \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \quad ; \quad b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x .$$

Démontrer :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f'(x) .$$

13. Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier qu'il existe un unique $j_n \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$a_n := \frac{j_n}{2^n} \leq x < \frac{j_n + 1}{2^n} =: b_n$$

puis démontrer que les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers x .

14. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $j \in \mathbf{N}$. Démontrer :

$$f\left(\frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right) .$$

15. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Démontrer :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} \in \{-1, 1\} .$$

On pourra poser $q_{n,k} := \lfloor 2 a_n 2^k \rfloor$, démontrer que $2 b_n 2^k \in [q_{n,k}, q_{n,k} + 1]$, puis exploiter des propriétés de la fonction φ en distinguant deux cas suivant la parité de l'entier $q_{n,k}$.

16. Dédurre des deux questions précédentes que la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est divergente.
17. Conclure quant à la non dérivabilité de f en x .

6. Densité de l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables

On considère le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

18. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ continues sur $[0, 1]$, dérivables en aucun point de $[0, 1]$, telle que :

$$g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} g .$$