

HP

Savoir si deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  ont une racine com ?

### Théorème d'Alembert Gauß:

↳ Si  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\deg(P) \geq 1$ , alors,  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{\deg(P)} \in \mathbb{C}$ ,  $P = \text{dom}(P) \prod_{k=1}^{\deg(P)} (X - \alpha_k)$

### Algorithme pour trouver des racines:

- Degré 1: OK
- Degré 2: forme canonique, extraction de  $\sqrt{\Delta}$ ,  $\Delta$
- Degré 3: Cardan
- Degré 4: Ferrari
- Degré  $\geq 5$ : Pas d'algorithme: (Galois, Abel)

### Résultat:

- $A = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$
- $B = X^q + b_{q-1}X^{q-1} + \dots + b_0$

Lemme: P et Q ont racines communes dans  $\mathbb{C} \Leftrightarrow P \wedge Q \neq 1$

[ $\Rightarrow$ ] Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est racine de P et de Q  
 Alors  $(X - \alpha) \mid P$  et  $(X - \alpha) \mid Q$  dans  $\mathbb{C}[X]$   
 Donc  $(X - \alpha) \mid P \wedge Q$   
 Donc  $P \wedge Q \neq 1$

[ $\Leftarrow$ ] Supposons  $P \wedge Q \neq 1$   
 $\exists D \in \mathbb{C}[X]$ ,  $D \mid P$ ,  $D \mid Q$  et  $\deg(D) \geq 1$   
 TFA:  $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ ,  $D(\alpha) = 0$  d'où  $\alpha$  racine de P et Q  
 ↳ (Théorème Fondamental de l'Algèbre)

(+) Grâce à Euclide, on a un algo (PGCD) pour savoir si P et Q ont une racine commune.

### Théorème:

$\Psi_{P,Q} : \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$  est linéaire ①  
 $(U, V) \mapsto PU + QV$  et  $P \wedge Q = 1 \Leftrightarrow \Psi_{P,Q}$  iso ②  
 $\begin{matrix} d^0 P & \swarrow & \downarrow & \searrow & d^0 Q \\ d^0 \leq q-1 & & d^0 \leq p-1 & & \end{matrix}$

①: Soit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $U_1, U_2 \in \mathbb{C}_{q-1}[X]$ ,  $V_1, V_2 \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_1(U_1, V_1) + \lambda_2(U_2, V_2)) &= \Psi(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) \\ &= P(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) + Q(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) \\ &= \lambda_1 P U_1 + \lambda_2 P U_2 + \lambda_1 Q V_1 + \lambda_2 Q V_2 \\ &= \lambda_1 (P U_1 + Q V_1) + \lambda_2 (P U_2 + Q V_2) \\ &= \lambda_1 \Psi(U_1, V_1) + \lambda_2 \Psi(U_2, V_2) \rightarrow \text{linéaire} \end{aligned}$$

②:  $\Rightarrow$  Supposons  $P \wedge Q = 1$  (ie P et Q n'ont pas de racines communes)

Soit  $(U, V) \in \text{Ker}(\varphi_{p,q})$ . Alors  $\varphi(U, V) = 0$

Donc,  $P'U + QV = 0$

Done,  $PV = -QV$

Polynôme  $Q = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  2 à 2 distinctes dans  $\mathbb{C}$  et  $m_i \geq 1$ ,  $\dots, m_n \geq 1$

Ainsi,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ne sont pas racines de  $P$

Donc,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont racines de  $U$

Donc  $Q \mid U$ , ie  $\tilde{U} = 0$ . De même,  $V = 0$  donc  $(U, V) = 0$

$$\hookrightarrow d^0 q \rightarrow d^0 q-1$$

□ Suppose  $\varphi_{p,q}$  is:

$$1 \in \text{Im}(\varphi_{p,q})$$
$$\exists (U, V) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] \text{ s.t. } UP + VQ = 1$$

D'après Birkhoff  $P \wedge Q = 1$

CCL :  $B = ((1, 0), \dots, (x^{q-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, x^{p-1}))$  est base de  $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ ,  $\mathcal{C} = (1, \dots, x^{p+q-1})$  base de  $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$

$P$  et  $Q$  n'ont pas de racines communes  $\Leftrightarrow \text{Résultant}(P, Q) = \det(\alpha_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}(\psi_P, \psi_Q) \neq 0$

- Soient  $(U, V) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ ,  $\varphi_{p,q} = PU + QV$

[illegible]

- Cas particuliers:

$P \in [IX], \deg(P) \geq 2$ ,  $P$  n'a que des racines simples dans  $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow P$  et  $P'$  n'ont pas de racines communes

$$\Leftrightarrow \text{Res}(P, P') \neq 0$$
$$= \text{Discriminant}(P)$$

→ polynôme en les coefficients de  $P$

Dm6: Exercice 4

Q7)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ , convergence de  $\sum \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln(a_n) = \ln(n!) + n - n \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n)$   
 Donc,  $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = u_n = \ln(n+1) + 1 - (n+1) \ln(n+1) - \frac{1}{2} \ln(n+1)$   
 $+ \ln(n) n + \frac{1}{2} \ln(n)$

$$= 1 + (n + \frac{1}{2}) \ln(\frac{n}{n+1})$$

$$\stackrel{+}{\sim} 1 + (n + 1 - \frac{1}{2}) (-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o(\frac{1}{n^3}))$$

$$\stackrel{+}{\sim} 1 - 1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{3(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\stackrel{+}{\sim} -\frac{1}{12(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2}) \text{ d'où } u_n \stackrel{+}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$$

Q8) calculons un équivalent de  $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$  en  $+\infty$

$\hookrightarrow f: t \mapsto t^2$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I = [1; +\infty[$

Soit  $t \in I$ ,  $f'(t) = -\frac{2}{t^2} < 0$  donc  $f \searrow$

Soit  $K \geq 2, n \geq K, N \geq n$ ,



$$\Rightarrow \int_K^{K+1} f(t) dt \leq f(K) \leq \int_{K-1}^K f(t) dt$$

En sommant de  $K=n$  à  $K=N$ , on a:

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n}^N f(k) \leq \int_{n-1}^N \frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{donc, } [-\frac{1}{t}]_n^{N+1} \leq \sum_{k=n}^N f(k) \leq [-\frac{1}{t}]_{n-1}^N$$

$$\text{d'où } -\frac{1}{N+1} + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^N f(k) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{N-1}$$

En passant à la limite  $N \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{n} \leq R_{N-1} \leq \frac{1}{n-1}$  avec  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$

donc,  $R_{n-1} \stackrel{+}{\sim} \frac{1}{n} \alpha > 1$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \stackrel{+}{\sim} \frac{1}{n}$

Q9) Prouvons que  $n! \stackrel{+}{\sim} \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n (1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$

$\cdot \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) \stackrel{+}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$   
 $\cdot \sum |\frac{-1}{12n^2} z|$  converge

Donc, par théorème de sommation des équivalents,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k) \sim -\frac{1}{12} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ donc } \sum_{k=n}^{+\infty} \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)$$

$$\stackrel{+}{\sim} -\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})$$

$\cdot \text{Soit } N \in \mathbb{N}^*, \exp(\sum_{k=n}^N \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)) = \prod_{k=n}^N \frac{a_{k+1}}{a_k}$

D'après Stirling,  $a_n \rightarrow_{+\infty} \sqrt{2\pi n}$ . Par passage à la limite, ( $N \rightarrow +\infty$ ), et continuité de  $\exp$  et télescopage,

$$\exp\left(-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}$$

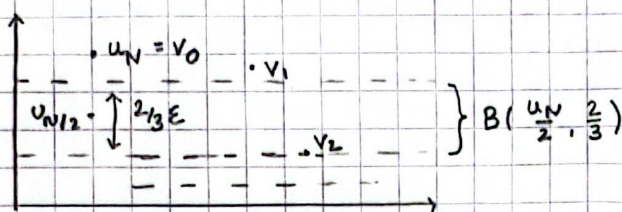
$$\text{donc } n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Exercice 5:

$$\bullet \forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

↳ Pour débiter, restreignons nous au cas  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

$$\text{Soit } \varepsilon > 0, \text{ comme } u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \rightarrow 0, \text{ il existe } N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \left| u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$



$$(v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \begin{cases} u_N = v_0 \\ \forall i \in \mathbb{N}, v_{i+1} = \frac{v_i}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ , posons  $P(n)$ : " $v_n \geq u_{N+n}$ "

I) Pour  $n=0$ ,  $u_0 = u_N$ , donc  $P(0)$

H) Fixons  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $P(n)$ . Alors,

$$\left| u_{N+n+1} - \frac{u_{N+n}}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{On a } u_{N+n+1} \leq \frac{u_{N+n}}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{v_n}{2} + \frac{\varepsilon}{3} = v_{n+1}, \text{ donc } P(n+1)$$

$(v_n)$  est arithmético-géo donc  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2^n} (u_N - \frac{2}{3}\varepsilon) + \frac{2}{3}\varepsilon$

$$\text{Or, } \frac{1}{2^n} (u_N - \frac{2}{3}\varepsilon) \xrightarrow{+\infty} 0$$

$$\text{Donc, il existe } N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2, \left| \frac{1}{2^n} (u_N - \frac{2}{3}\varepsilon) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Donc } v_n \leq \varepsilon$$

$$\text{Donc } u_{n+N} \leq \varepsilon$$

$$\text{Donc } u_n \xrightarrow{+\infty} 0$$

$$\text{↳ Montrons que } \left| u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \right| \xrightarrow{+\infty} 0$$

$$\text{Alors, } 0 \leq \left| u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \right| \leq \underbrace{\left| u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \right|}_{\xrightarrow{+\infty} 0}$$

$$\text{Donc } \left| u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \right| \rightarrow 0$$

$$\text{Donc } \left| u_n \right| \rightarrow 0$$

$$\text{Donc } u_n \rightarrow 0$$

(on se ramène au cas initial)

méthode 2:

• Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_{n+1} - \frac{u_n}{2}| \leq \varepsilon$$
$$\text{si } n \geq N, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2} + \varepsilon$$

Alors, pour  $N = n$ ,  $0 \leq u_{N+1} \leq \frac{u_N}{2} + \varepsilon$   
pour  $N+1 = n$ ,  $0 \leq u_{N+2} \leq \frac{u_{N+1}}{2} + \varepsilon \leq \frac{u_N}{2^2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$   
pour  $N+2 = n$ ,  $0 \leq u_{N+3} \leq \frac{u_{N+2}}{2} + \varepsilon \leq \frac{u_N}{2^3} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}$

Alors,  $\forall n \geq 0$ ,  $0 \leq u_{N+n} \leq \frac{u_N}{2^n} + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$

Donc,  $0 \leq u_{N+n} \leq \frac{u_N}{2^n} + 2\varepsilon$   $\leq 2$  puis on gagne.