

1

Correction Ddb

Ex 1: Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} U_n &= ah(n) + bh(1+n) + ch(2+n) \\ &= ah(n) + b(h(n) + h(1 + \frac{1}{n})) + c(h(n) + h(1 + \frac{2}{n})) \\ &= (a+b+c)h(n) + bh(1 + \frac{1}{n}) + ch(1 + \frac{2}{n}) \end{aligned}$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} (a+b+c)h(n) + b\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + c\left[\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} (a+b+c)h(n) + \frac{1}{n}(b+2c) + \frac{1}{n^2}\left(-\frac{b}{2} - 2c\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\triangle h\left(1 + \frac{2}{n}\right) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Raisonnons par analyse-synthèse

Analyse:

Supposons $\sum U_n$ GV

Donc: $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $(a+b+c)h(n) + \frac{1}{n}(b+2c) + \frac{1}{n^2}\left(-\frac{b}{2} - 2c\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Nécessairement: $a+b+c=0$

$$\begin{aligned} \text{Donc } U_n &= \frac{1}{n}(b+2c) + \frac{1}{n^2}\left(-\frac{b}{2} - 2c\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n}(b+2c)}_{\substack{= O\left(\frac{1}{n}\right) \\ > 0}} \end{aligned}$$

1^{er} cas: $b+2c=0$

$$\text{donc } U_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par théorème de comparaison pour les séries à termes positives, $\sum U_n$ ACV donc CV

2^{ème} cas: $b+2c \neq 0$

$$U_n = \frac{1}{n}(b+2c) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par critère de Pricmann, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

donc $\sum \underbrace{\frac{(b+2c)}{n}}_{\substack{\text{de signe constant.}}}$ diverge.

Par linéarité: $\sum U_n$ diverge.

Pour que $\sum C_n$ CV, il faut que $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$

Synthese

Supposons que ces conditions soient vérifiées

Donc: $C_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 $\sum_{n=0}^{\infty}$

Comme auparavant, $\sum C_n$ CV.

Ex 2:

Q2) Montrons que σ est surjective.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par disjonction de cas.

1^{er} cas: n est impaire.

$\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1 = \sigma(3k+2)$

2^{ème} cas: n est pair.

$\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

1^{er} sous-cas: k est pair.

$\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$.
 donc $n = 4p = \sigma(3p)$

2^{ème} sous-cas: K impaire.

donc

donc $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $K = 2p+1$

donc $n = 2(2p+1) = 4p+2 = \sigma(2p+1)$

Donc σ est surjective.

Montrons que σ est injective.

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(n_1) = \sigma(n_2)$

$$\bullet n_1 \equiv 0[3] \text{ et } n_2 \equiv 0[3]$$

$$\sigma(n_1) = \frac{4}{3}n_1 \text{ et } \sigma(n_2) = \frac{4}{3}n_2$$

$$\text{Comme } \sigma(n_1) = \sigma(n_2); n_1 = n_2$$

$$\bullet n_1 \equiv 1[3] \text{ et } n_2 \equiv 1[3]$$

$$\text{alors } \sigma(n_1) \equiv 0[4] \text{ et } \sigma(n_2) \equiv 2[4] \text{ Absurde.}$$

~~ou~~ De $\bar{m}$, $n_1 \equiv 1[3]$ et $n_2 \equiv 0[3]$ par symétrie

$$\bullet n_1 \equiv 0[3] \text{ et } n_2 \equiv 2[3]$$

Comme $\sigma(n_1)$ est pair et $\sigma(n_2)$ impaire; Absurde.

De $\bar{m}$, $n_1 \equiv 2[3]$ et $n_2 \equiv 0[3]$ par symétrie

3

$$\bullet \quad n_1 \equiv 1[3] \quad \text{et} \quad n_2 \equiv 2[3]$$

Comme $\sigma(n_1)$ pair et $\sigma(n_2)$ impaire; Absurde

De m^e; $n_1 \equiv 2[3] \quad \text{et} \quad n_2 \equiv 1[3] \quad \text{par symétrie}$

$$\bullet \quad n_1 \equiv 1[3] \quad \text{et} \quad n_2 \equiv 1[3]$$

$$\sigma(n_1) = 4 \left(\frac{n_1 - 1}{3} \right) + 2$$

$$\text{et} \quad \sigma(n_2) = 4 \left(\frac{n_2 - 1}{3} \right) + 2.$$

Donc $n_1 = n_2$.

$$\bullet \quad n_1 \equiv 2[3] \quad \text{et} \quad n_2 \equiv 2[3]$$

$$\sigma(n_1) = 2 \left(\frac{n_1 - 2}{3} \right) + 1$$

$$\text{et} \quad \sigma(n_2) = 2 \left(\frac{n_2 - 2}{3} \right) + 1.$$

Donc : $n_1 = n_2$

Dans les 3 cas; $n_1 = n_2$ donc σ est surjective
injective

Donc σ est bijective.

Q3) Passons par les sommes partielles et si elle converge, alors la série converge et on aura sa valeur.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} &= - \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-x)^{k-1} dx \\
 &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} dx \quad \leftarrow \text{linéarité} \\
 &= - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k dx \\
 &= - \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx \\
 &= - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx}_{= \mathbb{I}_n}
 \end{aligned}$$

O.n.g. $0 \leq |\mathbb{I}_n| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Par encadrement, $\mathbb{I}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Par passage à la limite ($n \rightarrow +\infty$),

4

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = - [\ln(1+x)]_0^1 = -\ln(2)$$

D'où $\sum O_n$ converge et vaut $-\ln(2)$

Q4) On pose $(S_n = \sum_{k=1}^n u_{O(k)})_{n \in \mathbb{N}^*}$

Ng: $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cr et calculons sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3n} u_{O(k)} &= \sum_{k=1}^n u_{O(3k)} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{O(3k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{O(3k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4k+2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

On a: $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \frac{1}{4} H_n + \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}}_{= H_{2n}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2} H_n} \right] \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k} \\ &= -H_n \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} H_n + \frac{1}{2} \left[H_{2n} - \frac{1}{2} H_n \right] - H_{2n} + \frac{1}{2} H_n$$

$$= \frac{1}{2} H_n - \frac{1}{2} H_{2n}$$

$$= \frac{1}{2} (h(n) + o(1) - h(2n) - o(1))$$

$$= -\frac{h(2)}{2} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{h(2)}{2}$$

$$\text{Dm } S_{3n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{h(2)}{2}$$

$$S_{3n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{h(2)}{2}$$

$$\text{Done } S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{h(2)}{2}$$