

Un corrigé du devoir maison n°6

1. Nature d'une série dépendant de trois paramètres [oral Mines-Télécom MPI]	1
2. Réorganisation des termes de la série harmonique alternée [oral Mines-Télécom MPI]	2
3. Topologie matricielle [oral Mines-Ponts MPI]	4
4. Raffinement de la formule de Stirling [oral Mines-Ponts MPI]	6
5. Une condition suffisante pour qu'une suite réelle converge vers 0 [oral X MPI]	8

1. Nature d'une série dépendant de trois paramètres [oral Mines-Télécom MPI]

Soient a, b, c des réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$.

Q1. — À quelles conditions sur a, b, c la série numérique $\sum u_n$ converge-t-elle ?

- Développement asymptotique de u_n à précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. — Comme :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + O(x^2)$$

et les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0, il vient :

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et :

$$\ln(n+2) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Nous en déduisons que :

$$u_n = (a+b+c) \ln(n) + (b+2c) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Cas où $a+b+c \neq 0$. — Supposons que $a+b+c \neq 0$. Alors :

$$|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |a+b+c| \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La série $\sum u_n$ est donc (grossièrement) divergente.

- Cas où $a+b+c = 0$ et $b+2c \neq 0$. — Supposons que $a+b+c = 0$ et $b+2c \neq 0$. Alors :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b+2c}{n}.$$

La série $\sum (b+2c)/n$ est divergente (Riemann) et ses termes ont un signe constant.

Le théorème de comparaison livre alors la divergence de la série $\sum u_n$ (dont les termes sont de signe constant à partir d'un certain rang).

- Cas où $a+b+c = 0$ et $b+2c = 0$. — Supposons que $a+b+c = 0$ et $b+2c = 0$. Alors :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum 1/n^2$ est convergente (Riemann) et ses termes ont un signe constant.

Le théorème de comparaison livre alors l'absolue convergence de la série $\sum u_n$, donc la convergence de la série $\sum u_n$.

- Conclusion. — D'après notre étude, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si le triplet (a, b, c) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+2c &= 0 \end{cases}$$

i.e. si (a, b, c) appartient à la droite de $\mathbf{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, -2, 1)$.

2. Réorganisation des termes de la série harmonique alternée [oral Mines-Télécom MPI]

Soit l'application $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \begin{cases} \sigma(3n) &= 4n ; \\ \sigma(3n+1) &= 4n+2 ; \\ \sigma(3n+2) &= 2n+1 . \end{cases}$$

Q2. — Démontrer que l'application σ est bijective.

- *Caractère bien défini.* — L'application σ est bien définie car :

$$\forall m \in \mathbf{N} \quad \exists ! (n, r) \in \mathbf{N} \times \{0, 1, 2\} \quad m = 3n + r \quad [\text{division euclidienne par 3 dans } \mathbf{N}] .$$

Tout entier naturel possède donc une unique image à valeur dans $\mathbf{N}$.

- *Surjectivité.* — Soit un entier m un entier naturel.

— Supposons m impair. Alors il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $m = 2q + 1$ et :

$$\sigma(3q+2) = 2q+1 = m .$$

— Supposons m pair. Alors il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $m = 2q$.

— Supposons q pair. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $q = 2k$, d'où $m = 4k$ et :

$$\sigma(3k) = 4k = m .$$

— Supposons q impair. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $q = 2k + 1$, d'où $m = 4k + 2$ et :

$$\sigma(3k+1) = 4k+2 = m .$$

Dans tous les cas, l'entier naturel m possède un antécédent par l'application σ dans $\mathbf{N}$.

- *Injectivité.* — Soient n_1, n_2 deux entiers naturels tels que $\sigma(n_1) = \sigma(n_2)$. Considérons les divisions euclidiennes de n_1, n_2 par 3 :

$$n_1 = 3q_1 + r_1 \quad \text{et} \quad n_2 = 3q_2 + r_2$$

où $q_1, q_2 \in \mathbf{N}$ et $r_1, r_2 \in \{0, 1, 2\}$. Par définition de l'application σ :

$$\sigma(n_1) = \begin{cases} 4q_1 & \text{si } r_1 = 0 \\ 4q_1 + 2 & \text{si } r_1 = 1 \\ 2q_1 + 1 & \text{si } r_1 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma(n_2) = \begin{cases} 4q_2 & \text{si } r_2 = 0 \\ 4q_2 + 2 & \text{si } r_2 = 1 \\ 2q_2 + 1 & \text{si } r_2 = 2 . \end{cases}$$

— Si $r_1 = 0$, alors $\sigma(n_1) = 4q_1$.

Nous en déduisons que $\sigma(n_2) = \sigma(n_1)$ est divisible par 4.

Ainsi $\sigma(n_2) = 4q_2$ et $r_2 = 0$.

Nous en déduisons que $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$, i.e. $n_1 = n_2$.

— Si $r_1 = 1$, alors $\sigma(n_1) = 4q_1 + 2$.

Nous en déduisons que $\sigma(n_2) = \sigma(n_1)$ est divisible par 2 mais n'est pas divisible par 4.

Ainsi $\sigma(n_2) = 4q_2 + 2$ et $r_2 = 1$.

Nous en déduisons que $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$, i.e. $n_1 = n_2$.

— Si $r_1 = 2$, alors $\sigma(n_1) = 2q_1 + 1$.

Nous en déduisons que $\sigma(n_2) = \sigma(n_1)$ n'est pas divisible par 4.

Ainsi $\sigma(n_2) = 2q_2 + 1$ et $r_2 = 2$.

Nous en déduisons que $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$, i.e. $n_1 = n_2$.

Q3. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Démontrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = - \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-x)^{k-1} dx = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k dx = - \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx = - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx}_{= \ln(2)} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx}_{=: I_n}.$$

et :

$$0 \leq |I_n| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge donc et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Q4. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_{\sigma(n)}$. Démontrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et calculer sa somme.

- *Développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique.* — On rappelle que :

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où γ est la constante d'Euler.

- *Formulation de la problématique.* — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)}.$$

- *Étude de S_{3n} .* — Soit un entier $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^n u_{\sigma(3k)} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(3k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(3k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n u_{4k} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{4k+2} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4k+2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{4} H_n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{4} H_n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{4} H_n - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{4} H_n - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{4} H_n - \frac{1}{2} \left(H_{2n} - \frac{1}{2} H_n \right) \\ &= \frac{1}{2} (H_n - H_{2n}) \end{aligned}$$

Avec le développement asymptotique de H_n rappelé ci-dessus, on obtient :

$$S_{3n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} (\ln(n) + \gamma - (\ln(2n) + \gamma) + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\ln(2)}{2} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(2)}{2}.$$

- *Contrôle de l'écart entre S_n et $S_{3\lfloor n/3 \rfloor}$.* — Soit $n \geq 2$. Considérons la division euclidienne de n par 3 :

$$n = 3q + r$$

où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$. Notons que $q = \lfloor n/3 \rfloor$, d'où $n/3 - 1 < q$.

— Si $r = 0$ alors :

$$|S_n - S_{3\lfloor n/3 \rfloor}| = 0.$$

— Si $r = 1$ alors :

$$|S_n - S_{3\lfloor n/3 \rfloor}| = |u_{\sigma(3q+1)}| = \frac{1}{4q+2} \leq \frac{3}{4n-6}.$$

— Si $r = 2$ alors :

$$|S_n - S_{3\lfloor n/3 \rfloor}| = |u_{\sigma(3q+1)} + u_{\sigma(3q+2)}| = \left| \frac{1}{4q+2} - \frac{1}{2q+1} \right| \leq \frac{1}{2q+1} \leq \frac{3}{2n-3}.$$

Dans tous les cas :

$$|S_n - S_{3\lfloor n/3 \rfloor}| \leq \frac{3}{2n-3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

et donc :

$$S_n - S_{3\lfloor n/3 \rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

d'après le théorème d'encadrement.

- *Conclusion.* — Des deux points précédents, nous déduisons :

$$S_n = S_n - S_{3\lfloor n/3 \rfloor} + S_{3\lfloor n/3 \rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\ln(2)}{2} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(2)}{2}.$$

La série $\sum \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)}$ est donc convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = -\frac{\ln(2)}{2}$.

3. Topologie matricielle [oral Mines-Ponts MPI]

Soit un entier $n \geq 3$. On note A l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

Q5. — L'ensemble A est-il ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

- *Topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.* — Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -espace de dimension $n^2 < \infty$, toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont équivalentes. La topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est donc intrinsèque, i.e. indépendante du choix d'une norme.
- *Une critère pour qu'un polynôme unitaire de degré n possède une racine dans un disque.* — Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire et de degré n . Considérons :

$$D(\lambda, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |\lambda - z| < \rho\}$$

le disque ouvert de $\mathbb{C}$, de centre $\lambda \in \mathbb{C}$ et de rayon $\rho > 0$.

— Supposons que P ne possède aucune racine dans $D(\lambda, \rho)$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, il existe des complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$P = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k).$$

Comme aucun des complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n'appartient au disque $D(0, \rho)$:

$$|\lambda - \alpha_1| \geq \rho, |\lambda - \alpha_2| \geq \rho, \dots, |\lambda - \alpha_n| \geq \rho.$$

Nous en déduisons que :

$$|P(\lambda)| \geq \rho^n.$$

— Nous avons établi l'implication :

$$P \text{ n'a aucune racine dans } D(\lambda, \rho) \implies |P(\lambda)| \geq \rho^n.$$

— Par contraposition :

$$(\star) \quad |P(\lambda)| < \delta^n \implies P \text{ possède une racine dans } D(\lambda, \delta).$$

- Une matrice $M \in A$ et des disques qui séparent ses n valeurs propres. — Considérons $M \in A$, i.e. une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ complexes deux à deux distinctes.

Posons :

$$\delta := \min \{ |\lambda_k - \lambda_\ell| : 1 \leq k < \ell \leq n \} > 0$$

la plus petite distance entre deux valeurs propres de M , de sorte que les n disques ouverts dans $\mathbb{C}$:

$$D(\lambda_1, \delta), D(\lambda_2, \delta), \dots, D(\lambda_r, \delta)$$

sont deux à deux disjoints.

- Les applications continues $f_1, f_2, \dots, f_n$. — Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application :

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ N & \longmapsto & \chi_N(\lambda_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{\ell=1}^n [\lambda_k I_n - N]_{\ell, \sigma(\ell)} \end{array} \right.$$

est polynomiale, donc continue.

- Les ouverts $U_1, U_2, \dots, U_n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. — Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $D(0_{\mathbb{C}}, \delta^n)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue :

$$\begin{aligned} U_k &:= f_k^{-1}(D(0_{\mathbb{C}}, \delta^n)) \\ &:= \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : |\chi_N(\lambda_k)| < \delta^n\} \\ &\subset \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : N \text{ possède une valeur propre dans } D(\lambda_k, \delta)\} \quad [\text{cf. } (\star)] \end{aligned}$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui contient la matrice M (puisque $f_k(M) = \chi_M(\lambda_k) = 0_{\mathbb{C}}$).

- Conclusion. — L'ensemble :

$$(\star\star) \quad U := \bigcap_{k=1}^n U_k \subset \bigcap_{k=1}^n \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : N \text{ possède une valeur propre dans } D(\lambda_k, \delta)\}$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (intersection finie d'ouverts), qui contient M .

Comme les disques :

$$D(\lambda_1, \delta), D(\lambda_2, \delta), \dots, D(\lambda_r, \delta)$$

sont deux à deux disjoints :

$$(\star\star\star) \quad \bigcap_{k=1}^n \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : N \text{ possède une valeur propre dans } D(\lambda_k, \delta)\} \subset A.$$

Nous avons donc construit un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$M \in U \subset A \quad [\text{cf. } (\star\star) \text{ et } (\star\star\star)].$$

Ceci étant vrai pour une matrice M quelconque de A , nous en déduisons que A est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Remarque. — On peut démontrer que A est l'intérieur de l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

Q6. — L'ensemble A est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

L'ensemble A n'est pas fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Justifiant le en prenant appui sur la caractérisation séquentielle des fermés.

Définissons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice M_k de A par :

$$M_k := \text{diag}\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{n}{k}\right) \quad \left[\chi_A = \prod_{\ell=1}^n \left(X - \frac{\ell}{k}\right) \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{C} \right].$$

Remarquons alors que :

$$M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \notin A \quad \left[\chi_{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}} = X^n \text{ n'est pas scindé à racines simples sur } \mathbb{C} \right]$$

puisqu'il y a convergence coefficient par coefficient, donc pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donc pour toute norme $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ est de dimension finie).

4. Raffinement de la formule de Stirling [oral Mines-Ponts MPI]

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$.

Q7. — Démontrer que la série numérique $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ converge.

La série $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ est télescopique. Sa convergence équivaut donc à la convergence de la suite $(\ln(a_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. D'après la formule de Stirling, $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, donc :

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi}.$$

Par continuité de la fonction $\ln$ au point $\sqrt{2\pi}$, il vient :

$$\ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{2\pi}) = \frac{\ln(2\pi)}{2}.$$

Nous en déduisons que la série $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n) - \ln(a_1) = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

Q8. — Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous savons que la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, ce qui légitime de considérer ses restes.

Nous allons appliquer une comparaison série-intégrale, technique classique pour déterminer un équivalent d'un reste de série de Riemann convergente.

La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.

Donc, pour tout entier $k \geq 2$:

$$(*) \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx.$$

Fixons un entier $n \geq 2$, puis un entier N tel que $n \leq N$.

En sommant les inégalités $(*)$ pour k variant de n à N , il vient :

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^N \frac{1}{x^2} dx$$

i.e. :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N}.$$

Les trois termes de l'inégalité précédente possède une limite finie, lorsque N tend vers $+\infty$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, arrive :

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}.$$

Comme $\frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, nous en déduisons que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Q9. — Démontrer que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

- Réduction du problème à un calcul d'équivalent. — Supposons que :

$$(*) \quad \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2} < 0.$$

Comme la série $\sum 1/n^2$ converge, le théorème de sommation des équivalents nous livre :

$$\ln(\sqrt{2\pi}) - \ln(a_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{12k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n}$$

i.e. :

$$\ln\left(\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En composant par la fonction exponentielle, nous obtenons :

$$\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Puisque $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il vient :

$$\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

qui est le résultat demandé.

Il suffit donc d'établir $(*)$ pour résoudre la question.

- Calcul d'un équivalent de $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}} \frac{n^n \sqrt{n}}{n! e^n} \\ &= e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2} \\ &= e \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-1/2} \\ &= e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1/2} \\ &= e \times \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \times \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \times \exp\left(-1 - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \times e^{-1} \times \exp\left(-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

En composant par la fonction logarithme, nous obtenons :

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}.$$

5. Une condition suffisante pour qu'une suite réelle converge vers 0 [oral X MPI]

Q10. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Démontrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- *Précisions sur l'énoncé.* — Il n'est pas précisé la nature des termes u_n de la suite, pas plus que le sens des convergences évoquées.

Nous allons nous placer dans le contexte le plus général offert par le programme.

Soient donc $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0_E.$$

Nous allons démontrer qu'alors :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0_E.$$

- *Réduction au cas où la suite est à termes réels positifs.* — D'après la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \left| \|u_{n+1}\| - \frac{\|u_n\|}{2} \right| \leq \left\| u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \right\|.$$

Le théorème d'encadrement assure alors que $\|u_{n+1}\| - \frac{\|u_n\|}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathbb{R}}$.

D'autre part :

$$\|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathbb{R}} \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0_E.$$

Aussi, quitte à remplacer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$, pouvons-nous supposer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes réels positifs.

- *Démonstration dans le cas où la suite est à termes positifs.* — Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathbb{R}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1 \quad \left| u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \right| \leq \varepsilon.$$

Nous en déduisons que :

$$\forall n \geq N_1 \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n + \varepsilon.$$

Ainsi :

$$0 \leq u_{N_1+1} \leq \frac{1}{2} u_{N_1} + \varepsilon$$

$$0 \leq u_{N_1+2} \leq \frac{1}{2} u_{N_1+1} + \varepsilon \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} u_{N_1} + \varepsilon \right) + \varepsilon = \frac{1}{4} u_{N_1} + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \varepsilon$$

$$0 \leq u_{N_1+3} \leq \frac{1}{2} u_{N_1+2} + \varepsilon \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} u_{N_1} + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \varepsilon \right) + \varepsilon = \frac{1}{8} u_{N_1} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \varepsilon .$$

On démontre, par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leq u_{N_1+n} \leq \frac{1}{2^n} u_{N_1} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \right) \varepsilon .$$

Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$0 \leq u_{N_1+n} \leq \frac{1}{2^n} u_{N_1} + 2 \varepsilon .$$

La précédente identité, qui vaut aussi pour $n = 0$, se réécrit :

$$(*) \quad \forall n \geq N_1 \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n-N_1}} u_{N_1} + 2 \varepsilon .$$

Comme $\frac{1}{2^{n-N_1}} u_{N_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$(**) \quad \forall n \geq N_2 \quad \frac{1}{2^{n-N_1}} u_{N_1} \leq \varepsilon .$$

D'après (*) et (**):

$$\forall n \geq \max \{N_1, N_2\} \quad 0 \leq u_n \leq 3 \varepsilon .$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge donc vers 0.

- *Généralisation.* — On démontre de même que, si $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ est telle que :

$$\exists a \in [0, 1[\quad u_{n+1} - a u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E$$

alors :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E .$$