

Un corrigé du devoir maison n°5

1. Consignes pour la rédaction d'après le concours CentraleSupélec	1
2. Consigne pour la rédaction d'un sujet sur les intégrales généralisées	1
3. La fonction Gamma d'Euler	1
4. La fonction Bêta d'Euler	3
5. Espaces $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$	7

Les étudiants de MPI résolvent les questions numérotées de 1 à 10, ceux de MPI* toutes les questions.

Les trois parties sont indépendantes.

1. Consignes pour la rédaction d'après le concours CentraleSupélec

Avant de composer, on prendra le temps de méditer les remarques suivantes, portant sur la rédaction, piochées dans le rapport de jury de l'épreuve de mathématiques 1 du concours CentraleSupélec 2024 de la filière MPI [source].

- (1) « Il faut noter que certains candidats ne semblent pas avoir compris le rôle du brouillon, qu'ils confondent avec leur copie. Certaines copies remplies de ratures et particulièrement mal présentées ont été sanctionnées par un malus. »
- (2) « Ne pas se précipiter et prendre le temps de donner tous les arguments nécessaires (hypothèses d'un théorème...). »
- (3) « Ne pas hésiter à utiliser un résultat d'une question précédente. »
- (4) « Ne pas essayer de tromper le correcteur. Un calcul qui démarre mal et qui finit miraculeusement sur le résultat attendu est du plus mauvais effet. »

J'ajoute un conseil adressé aux candidats, présent dans ibid.

- (5) « Nous ne saurions trop conseiller aux futurs candidats de bien travailler toutes les notions vues en cours (...) ainsi que de bien connaître les notions de première année. »

2. Consigne pour la rédaction d'un sujet sur les intégrales généralisées

On veillera à **bien justifier que chaque intégrale apparaissant dans son travail existe**. Ainsi, aura-t-on bien conscience que le théorème d'intégration par parties et le théorème de changement de variable portent en eux des résultats de convergence d'intégrales et qu'ils ne se résument pas à des formules potentiellement vides de sens.

3. La fonction Gamma d'Euler

Q1. — Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x tels que le nombre :

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

soit bien défini.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

- *Schéma rédactionnel.* — La fonction :

$$f_x : t \longmapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} \geq 0$$

est définie, continue et positive sur $]0, +\infty[$.

- *D'une étude de nature d'intégrale à une étude d'intégrabilité de fonction.* — En raison du signe de la fonction f_x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_x(t) dt$ existe si et seulement si la fonction f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- *Étude de la singularité en 0^+ .* — Nous observons que :

$$f_x(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \geq 0.$$

D'après le critère de Riemann en 0^+ et le théorème de comparaison, la fonction f_x est intégrable en 0^+ si et seulement si $x > 0$.

- *Étude de la singularité en $+\infty$.* — D'après les résultats sur les croissances comparées des fonctions puissances contre les fonctions exponentielles :

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

D'après le critère de Riemann en $+\infty$ et le théorème de comparaison, la fonction f_x est intégrable en $+\infty$.

- *Conclusion.* — De cette étude on déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_x(t) dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

Donc $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

Q2. — Démontrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

Fixons un réel $x > 0$. Nous allons procéder à une intégration par parties sur l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$$

que nous savons converger (et valoir $\Gamma(x+1)$ par définition). Les fonctions :

$$u_x : t \longmapsto t^x \quad \text{et} \quad v : t \longmapsto -e^{-t}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Par opérations sur les limites :

$$u_x(t) \times v(t) = -t^x e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -t^x = -e^{x \ln(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$$

et, d'après les résultats sur les croissances comparées des fonctions puissances contre les fonctions exponentielles :

$$u_x(t) \times v(t) = -t^x e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\quad} 0.$$

Donc $[u_x \times v]_0^{+\infty}$ est bien défini et vaut 0. D'après le théorème d'intégration par parties, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x t^{x-1} (-e^{-t}) dt$$

converge (ce que nous savions déjà) et :

$$\Gamma(x+1) := \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [u_x \times v]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x t^{x-1} (-e^{-t}) dt = x \Gamma(x).$$

Q3. — En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.

On raisonne par récurrence.

- *Définition du prédicat.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $\mathcal{P}(n)$ par

$$\mathcal{P}(n) : \ll \Gamma(n) = (n-1)! \gg.$$

- *Initialisation à $n = 1$.* — La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$. Soit A un réel positif.

$$\int_0^A e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^A = 1 - e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi $\Gamma(1) = 1 = 0!$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- *Hérédité.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi $\Gamma(n) = (n-1)!$. D'après la question 2

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

- *Conclusion.* — De l'initialisation à $n = 1$, de l'hérédité et de l'axiome de récurrence, nous déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

4. La fonction Bêta d'Euler

Q4. — Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des couples (x, y) de réels tels que le nombre :

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

soit bien défini.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- *Schéma rédactionnel.* — La fonction :

$$f_{x,y} : t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1} = e^{(x-1)\ln(t)} e^{(y-1)\ln(1-t)} \geq 0$$

est définie, continue et positive sur $]0, 1[$.

- *D'une étude de nature d'intégrale à une étude d'intégrabilité de fonction.* — En raison du signe de la fonction $f_{x,y}$, l'intégrale $\int_0^1 f_{x,y}(t) dt$ existe si et seulement si la fonction $f_{x,y}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
- *Étude de la singularité en 0^+ .* — Nous observons que :

$$f_{x,y}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \geq 0.$$

D'après le critère de Riemann en 0^+ et le théorème de comparaison, la fonction f_x est intégrable en 0^+ si et seulement si $x > 0$.

- *Étude de la singularité en 1^- .* — Nous observons que :

$$f_{x,y}(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-y}} \geq 0.$$

D'après le critère de Riemann en 1^- et le théorème de comparaison, la fonction $f_{x,y}$ est intégrable en 1^- si et seulement si $y > 0$.

- *Conclusion.* — De cette étude on déduit que l'intégrale $\int_0^1 f_{x,y}(t) dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Donc $\mathcal{D} =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Q5. — Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}^2$, $B(x, y) = B(y, x)$.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. La fonction φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ll}]0, 1[& \longrightarrow]0, 1[\\ t & \longmapsto 1-t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement décroissante. Comme nous savons que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge, le théorème de changement de variable nous livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^1 \underbrace{\varphi(u)^{x-1} (1-\varphi(u))^{y-1} \varphi'(u)}_{-(1-u)^{x-1} u^{y-1}} du \quad [\text{ce que nous savons déjà}]$$

et l'identité :

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = - \int_0^1 -(1-u)^{x-1} u^{y-1} du =: B(y, x).$$

Q6. — Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}^2$, $B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1)$.

Soient x et y des réels strictement positifs. Par linéarité des intégrales convergentes :

$$\begin{aligned} B(x+1, y) + B(x, y+1) &:= \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} + t^{x-1} (1-t)^y dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underbrace{(t + (1-t))}_{=1} dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &=: B(x, y). \end{aligned}$$

Q7. — Calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- *Heuristique.* — Il nous faut calculer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

Cette dernière expression nous invite à considérer le changement de variable suivant.

- *Un changement de variable.* — La fonction φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc}]0, 1[& \longrightarrow &]0, 1[\\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante. Comme nous savons que l'intégrale

$$\int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt$$

converge, le théorème de changement de variable nous livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^1 \underbrace{\varphi(u)^{-1/2} (1-\varphi(u))^{-1/2} \varphi'(u)}_{2(1-u^2)^{-1/2}} du$$

et l'identité :

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) := \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

- *Calculs d'intégrales partielles grâce à la fonction arcsin.* — La fonction $u \mapsto 1/\sqrt{1-u^2}$ est définie et continue sur $[0, 1[$. Fixons $a \in [0, 1[$. Alors :

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = [\arcsin(u)]_0^a = \arcsin(a) - \arcsin(0) \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

grâce à la continuité de la fonction arcsin en 1^- . L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ est donc convergente (ce que nous savions déjà) et vaut $\pi/2$.

- *Conclusion.* — D'après les deux points précédents, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

Q8. — Calculer $B(1, n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$B(1, n) = \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt.$$

Comme la fonction $t \mapsto (1-t)^{n-1}$ est définie et continue sur $[0, 1]$, l'intégrale $\int_0^1 (1-t)^{n-1} dt$ est

celle d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$.

$$B(1, n) = \left[\frac{-(1-t)^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{n}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(1, n) = \frac{1}{n}$.

Q9. — Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}^2$, $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.

Soient x et y des réels strictement positifs.

- *Une intégration par parties comme première étape.* — Nous allons procéder à une intégration par parties sur l'intégrale :

$$\int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt$$

que nous savons converger (et valoir $B(x+1, y)$ par définition). Les fonctions :

$$u_x : t \mapsto t^x \quad \text{et} \quad v_y : t \mapsto -\frac{1}{y} \times (1-t)^y$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$. Par opérations sur les limites :

$$u_x(t) \times v_y(t) = -\frac{1}{y} t^x \times (1-t)^y \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{y} t^x = -\frac{1}{y} e^{x \ln(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

et :

$$u_x(t) \times v_y(t) = -\frac{1}{y} t^x \times (1-t)^y \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{1}{y} (1-t)^y = -\frac{1}{y} e^{y \ln(1-t)} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0.$$

Donc $[u_x \times v_y]_0^1$ est bien défini et vaut 0. D'après le théorème d'intégration par parties, l'intégrale :

$$\int_0^1 x t^{x-1} \left(-\frac{1}{y} \right) (1-t)^y dt$$

converge (ce que nous savions déjà) et :

$$B(x+1, y) := \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt = [u_x \times v_y]_0^1 - \int_0^1 x t^{x-1} \left(-\frac{1}{y} \right) (1-t)^y dt = \frac{x}{y} B(x, y+1).$$

Ainsi avons-nous obtenu :

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y).$$

- *Conclusion avec la question 6.* — Grâce à Q6, il vient alors :

$$B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x+1, y) \times \left(1 + \frac{y}{x} \right) = \frac{x+y}{x} B(x+1, y)$$

puis :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

Q10. — Calculer $B(n, p)$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$. Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles d'entiers.

Soient $n, p \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 B(n, p) &= \frac{n-1}{n-1+p} \times B(n-1, p) \quad [\text{d'après Q9}] \\
 &= \frac{n-1}{n-1+p} \times \frac{n-2}{n-2+p} \times B(n-2, p) \quad [\text{d'après Q9}] \\
 &\vdots \\
 &= \frac{n-1}{n-1+p} \times \frac{n-2}{n-2+p} \times \dots \times \frac{1}{1+p} \times B(1, p) \quad [\text{d'après Q9}] \\
 &= \frac{n-1}{n-1+p} \times \frac{n-2}{n-2+p} \times \dots \times \frac{1}{1+p} \times \frac{1}{p} \quad [\text{d'après Q8}]
 \end{aligned}$$

Donc :

$$B(n, p) = \frac{(n-1)! \times (p-1)!}{(n+p-1)!} = \frac{\Gamma(n) \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}.$$

Remarque. — Une démonstration rigoureuse de ce résultat, après conjecture de la formule ci-dessus, peut être obtenue comme suit. On fixe un entier naturel non nul p , puis on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^$:*

$$\mathcal{P}(n) : B(n, p) = \frac{(n-1)! \times (p-1)!}{(n+p-1)!}.$$

L'initialisation à $n = 1$ est fournie par Q5 et, pour l'hérédité, on s'appuie sur Q6 qui livre :

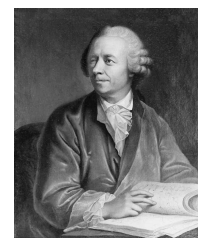
$$B(n+1, p) = \frac{n}{n+p} B(n, p).$$

Les détails de la rédaction sont laissés au lecteur.

Remarque. — Les fonctions Γ et B d'Euler sont liées par la relation :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

qui étend les résultats obtenus précédemment, des entiers naturels non nuls aux réels strictement positifs.



Leonhard Euler (1707-1783)

5. Espaces $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$

On introduit l'ensemble $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions continues et de carré intégrable sur $\mathbf{R}$, i.e. :

$$L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) \, dt < +\infty \right\}.$$

Q11. — Soient $f, g \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Démontrer que $f \times g$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

- *Régularité de la fonction.* — La fonction $f \times g$ est continue sur $\mathbf{R}$, comme produit de deux fonctions continues.
- *Cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique.* — Pour tout $a, b \in \mathbf{R}$:

$$|ab| \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$$

car $(|a| - |b|)^2 \geq 0$. Ainsi :

$$0 \leq |f \times g| \leq \frac{1}{2} (f^2 + g^2) .$$

- *Conclusion avec le théorème de domination pour les fonctions positives.* — Par hypothèse les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt$ convergent. Par linéarité, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (f^2(t) + g^2(t)) dt$ converge. Par théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) \times g(t)| dt$ est convergente, i.e. la fonction $f \times g$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Q12. — Démontrer que $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

- *Caractère non vide.* — La fonction $x \mapsto 0$ définie sur $\mathbf{R}$ appartient à $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
- *Stabilité par combinaison linéaire.* — Soient $f, g \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors :

$$(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda\mu fg + \mu^2 g^2 .$$

Par hypothèse, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt$ convergent. D'après Q11, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \times g(t) dt$ est absolument convergente donc convergente. Nous en déduisons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))^2 dt$ converge, comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

Q13. — Démontrer que l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

- *Linéarité à gauche.* — D'après les résultats sur la linéarité des intégrales convergentes :

$$\forall f_1, f_2, g \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \quad \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle .$$

- *Symétrie.* — La commutativité de la multiplication dans $\mathbf{R}$ livre :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle .$$

- *Linéarité à droite* — La linéarité à gauche et la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ impliquent que :

$$\forall f, g_1, g_2 \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \quad \langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle = \lambda_1 \langle f, g_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, g_2 \rangle .$$

- *Positivité* — Soit $f \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Comme $f^2 \geq 0$, la positivité de l'intégrale livre $\langle f, f \rangle \geq 0$.
- *Caractère défini* — Soit $f \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt =: \langle f, f \rangle = 0 .$$

Comme la fonction f^2 est continue et positive sur $\mathbf{R}$, la propriété de séparation des intégrales de fonctions continues et positives donne, pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$f^2(t) = 0$$

puis, pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$f(t) = 0 .$$

Fixons, pour toute la suite une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f, f'' \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Q14. — Démontrer que $f' \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On pourra raisonner par l'absurde.

- *Régularité de la fonction.* — La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, la fonction f' est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.

- *Convergence de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$. — Raisonnons par l'absurde et supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$ diverge. Comme la fonction $(f')^2$ est positive, il vient :

$$(*) \quad \int_0^x (f'(t))^2 dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty .$$

Fixons un réel $x > 0$. Comme les fonctions f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, x]$, la formule d'intégration par parties livre :

$$\int_0^x (f'(t))^2 dt = f(x) \times f'(x) - f(0) \times f'(0) - \int_0^x f(t) \times f''(t) dt$$

puis :

$$(**) \quad f(x) \times f'(x) = \int_0^x (f'(t))^2 dt + f(0) \times f'(0) + \int_0^x f(t) \times f''(t) dt .$$

D'après Q11, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \times f''(t) dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ainsi, par définition même de la convergence d'une intégrale sur l'intervalle $[0, +\infty[$:

$$(***) \quad \exists L \in \mathbf{R} \quad \int_0^x f(t) \times f''(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L .$$

De $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, nous déduisons que :

$$f(x) \times f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty .$$

Par définition même de la notion de limite, il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall x \geq A \quad f(x) \times f'(x) \geq 1 .$$

Grâce à la croissance de l'intégrale, nous en déduisons que, pour tout $x \geq A$:

$$\frac{f^2(x) - f^2(A)}{2} = \int_A^x f(t) \times f'(t) \, dt \geq \int_A^x 1 \, dt = x - A$$

puis :

$$f^2(x) \geq f^2(A) + 2(x - A) \geq 0 .$$

En considérant les intégrales partielles, on vérifie que :

$$\int_A^{+\infty} f^2(A) + 2(x - A) \, dx = +\infty .$$

Par théorème de domination pour les fonctions positives, il vient :

$$\int_A^{+\infty} f^2(x) \, dx = +\infty \quad [\text{contradiction avec } f^2 \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})] .$$

- *Convergence de l'intégrale* $\int_{-\infty}^0 (f'(t))^2 \, dt$. — Analogue à l'étude faite pour $\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \, dt$.
- *Conclusion.* — Les convergences des intégrales $\int_{-\infty}^0 (f'(t))^2 \, dt$ et $\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \, dt$ livrent la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 \, dt$, par définition même.

Q15. — Démontrer que :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 \, dt \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) \, dt \right) \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f''(t))^2 \, dt \right) .$$

- *Heuristique.* — En considérant le produit scalaire introduit en Q12 et la norme $\| \cdot \|$ associée, l'identité demandée s'écrit :

$$\|f'\|^2 := \langle f', f' \rangle \leq \|f\| \times \|f''\| .$$

Il est tentant d'effectuer une intégration par parties sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 \, dt$ pour faire

apparaître l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \times f''(t) \, dt$, sous réserve d'existence de $[f' \times f]_{-\infty}^{+\infty}$ (étape clé).

On pourrait alors appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- *Comportement asymptotique de $f \times f'$ en $+\infty$.* — Comme précédemment, au moyen d'une

intégration par parties, on obtient, pour tout $x > 0$:

$$f(x) \times f'(x) = \int_0^x (f'(t))^2 dt + f(0) \times f'(0) + \int_0^x f(t) \times f''(t) dt .$$

Les convergences des intégrales $\int_0^{+\infty} f(t) \times f''(t) dt$ (Q11) et $\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$ (Q14) nous apprennent alors que :

$$\exists \ell \in \mathbf{R} \quad f(x) \times f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell .$$

Nous démontrons alors que $\ell = 0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons $\ell \neq 0$. Alors :

$$f(x) \times f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell .$$

Comme la fonction constante ℓ est de signe constant et non intégrable en $+\infty$, le théorème d'intégration des relations de comparaison livre :

$$\frac{f^2(x) - f^2(0)}{2} = \int_0^x f(t) \times f'(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^x \ell dt = \ell x$$

puis :

$$f^2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ell x .$$

La fonction $x \mapsto 2\ell x$ a un signe constant et n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème de comparaison, la fonction f^2 n'est donc pas intégrable en $+\infty$. Contradiction.

Nous avons démontré que :

$$f(x) \times f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 .$$

- *Comportement asymptotique de $f \times f'$ en $-\infty$.* — De manière analogue, on établit que la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times f'(x)$ existe et vaut 0.

- *Conclusion.* — Nous allons appliquer le théorème d'intégration par parties sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \times f'(t) dt$ que nous savons converger (Q14). Les fonctions f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, +\infty[$. D'après les deux points précédents, les limites de la fonction $f \times f'$ en $\pm\infty$ existent et sont nulles. Le théorème d'intégration par parties nous apprend que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \times f''(t) dt$ converge (ce que nous savions déjà) et livre :

$$(*) \quad \|f'\|^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \times f'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \times f''(t) dt =: \langle f, f'' \rangle .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous apprend que :

$$(**) \quad \langle f, f'' \rangle \leq \|f\| \times \|f''\| .$$

L'inégalité demandée est conséquence de (*) et (**).