

Devoir maison n°5

pour le lundi 3 novembre

1. Consignes pour la rédaction d'après le concours CentraleSupélec	1
2. Consigne pour la rédaction d'un sujet sur les intégrales généralisées	1
3. La fonction Gamma d'Euler	2
4. La fonction Bêta d'Euler	2
5. Espaces $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$	3

Les étudiants de MPI résolvent les questions numérotées de 1 à 10, ceux de MPI* toutes les questions.

Les trois parties sont indépendantes.

1. Consignes pour la rédaction d'après le concours CentraleSupélec

Avant de composer, on prendra le temps de méditer les remarques suivantes, portant sur la rédaction, piochées dans le rapport de jury de l'épreuve de mathématiques 1 du concours CentraleSupélec 2024 de la filière MPI [source].

- (1) « Il faut noter que certains candidats ne semblent pas avoir compris le rôle du brouillon, qu'ils confondent avec leur copie. Certaines copies remplies de ratures et particulièrement mal présentées ont été sanctionnées par un malus. »
- (2) « Ne pas se précipiter et prendre le temps de donner tous les arguments nécessaires (hypothèses d'un théorème...). »
- (3) « Ne pas hésiter à utiliser un résultat d'une question précédente. »
- (4) « Ne pas essayer de tromper le correcteur. Un calcul qui démarre mal et qui finit miraculeusement sur le résultat attendu est du plus mauvais effet. »

J'ajoute un conseil adressé aux candidats, présent dans ibid.

- (5) « Nous ne saurions trop conseiller aux futurs candidats de bien travailler toutes les notions vues en cours (...) ainsi que de bien connaître les notions de première année. »

2. Consigne pour la rédaction d'un sujet sur les intégrales généralisées

On veillera à **bien justifier que chaque intégrale apparaissant dans son travail existe**. Ainsi, aura-t-on bien conscience que le théorème d'intégration par parties et le théorème de changement de variable portent en eux des résultats de convergence d'intégrales et qu'ils ne se résument pas à des formules potentiellement vides de sens.

3. La fonction Gamma d'Euler

Q1. — Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x tels que le nombre :

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

soit bien défini.

Q2. — Démontrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

Q3. — En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.

4. La fonction Bêta d'Euler

Q4. — Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des couples (x, y) de réels tels que le nombre :

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

soit bien défini.

Q5. — Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}^2$, $B(x, y) = B(y, x)$.

Q6. — Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}^2$, $B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1)$.

Q7. — Calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Q8. — Calculer $B(1, n)$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Q9. — Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}^2$, $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.

Q10. — Calculer $B(n, p)$ pour tout $n, p \in \mathbf{N}^*$. Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles d'entiers.

Remarque. — Les fonctions Γ et B d'Euler sont liées par la relation :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

qui étend les résultats obtenus précédemment, des entiers naturels non nuls aux réels strictement positifs.



Leonhard Euler (1707-1783)

5. Espaces $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$

On introduit l'ensemble $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions continues et de carré intégrable sur $\mathbf{R}$, i.e. :

$$L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) \, dt < +\infty \right\}.$$

Q11. — Soient $f, g \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Démontrer que $f \times g$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Q12. — Démontrer que $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Q13. — Démontrer que l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) \, dt \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Fixons, pour toute la suite une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f, f'' \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Q14. — Démontrer que $f' \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On pourra raisonner par l'absurde.

Q15. — Démontrer que :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 \, dt \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) \, dt \right) \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f''(t))^2 \, dt \right).$$