

# Un corrigé du devoir maison n°4 ★

adapté d'un travail de Christophe Devulder

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| 1. Notations .....          | 1 |
| 2. Théorème spectral .....  | 1 |
| 3. Objectifs .....          | 2 |
| 4. Exemples .....           | 2 |
| 5. Cas réel .....           | 4 |
| 6. Lemme des colonnes ..... | 5 |
| 7. Cas général .....        | 9 |

## 1. Notations

Dans tout le problème,  $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

Étant donnés deux entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls, on note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbf{K}$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ . Pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $E_{i,j}$  la matrice élémentaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  ayant exactement un coefficient non nul, situé en position  $(i, j)$  et de valeur 1. La transposée d'une matrice  $M$  sera notée  $M^\top$ .

Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.

On note  $S_n(\mathbf{K})$ ,  $A_n(\mathbf{K})$  et  $T_n^{++}(\mathbf{K})$  les sous-ensembles de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.

On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour  $x$  et  $y$  deux entiers,

$$\Delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y ; \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

**Définition 1.** — Etant donné un entier naturel non nul  $n$ , un sous-espace vectoriel  $V$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , et un élément  $j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $C_j(V)$  l'ensemble des matrices de  $V$  dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la  $j$ -ème.

Pour toute matrice  $M \in M_n(\mathbf{K})$  avec  $n \geq 2$ , on notera  $K(M) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ ,  $R(M) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{K})$ ,  $L(M) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$  et  $a(M) \in \mathbf{K}$  la décomposition de  $M$  en blocs suivante :

$$M = \left( \begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array} \right). \quad (1)$$

On a en particulier défini des fonctions  $K : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$  et  $L : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ , évidemment linéaires.

## 2. Théorème spectral

On pourra appliquer le théorème suivant, admis aujourd'hui, mais démontré plus tard dans l'année.

**Théorème (spectral).** — Pour toute matrice  $S \in S_n(\mathbf{R})$ , il existe une matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbf{R})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telles que  $S = P D P^{-1}$  et  $P^{-1} = P^\top$ .

### 3. Objectifs

**Définition 2.** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . On dit que  $A$  est **quasi-nilpotente** lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans  $\mathbf{K}$ . Une partie  $V$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est dite **quasi-nilpotente** lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suite.

**Théorème (dimension des espaces quasi-nilpotents).** — Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent  $N$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on a :

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}. \quad (\text{QN})$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie 6.

**Lemme (des colonnes).** — Pour tout sous-espace vectoriel  $V$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , quasi-nilpotent, il existe un élément  $j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $C_j(V) = \{0\}$ .

### 4. Exemples

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**Q1.** — Montrer que la matrice  $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est quasi-nilpotente vue comme matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ . Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$  ?

Le polynôme caractéristique de  $D$  est :

$$\chi_D = X^2 + 1.$$

Il n'a aucune racine réelle et le spectre réel de  $D$  est vide. En particulier  $D$  n'a aucune valeur propre réelle non nulle et  $D$  est  $\mathbf{R}$ -quasi-nilpotente.

Le spectre complexe de  $D$  est  $\{i, -i\}$  et contient au moins un élément non nul donc  $D$  n'est pas  $\mathbf{C}$ -quasi-nilpotente.

**Q2.** — Montrer que la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  est quasi-nilpotente vue comme matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ .

Le polynôme caractéristique de  $B$  est :

$$\chi_B = X^2 - \text{Tr}(B)X + \det(B) = X^2.$$

Ainsi, le spectre complexe de  $B$  est  $\{0\}$  et ne contient aucun élément non nul.  $B$  est  $\mathbf{C}$ -quasi-nilpotente.

**Q3.** — Montrer que  $S_n(\mathbf{K})$ ,  $A_n(\mathbf{K})$  et  $T_n^{++}(\mathbf{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Montrer que la dimension de  $S_n(\mathbf{K})$  est  $n(n+1)/2$ .

- $S_n(\mathbf{K})$  est le noyau de l'application linéaire :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M - M^\top \end{array} \right.$$

donc est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

- $A_n(\mathbf{K})$  est le noyau de l'application linéaire :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M - M^\top \end{array} \right.$$

donc est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

Comme :

$$T_n^{++}(\mathbf{K}) = \text{Vect}((E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n})$$

$T_n^{++}(\mathbf{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

- Montrons que :

$$S_n(\mathbf{K}) = \text{Vect}((E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n} \# (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n})$$

- L'inclusion réciproque est vraie car les  $E_{i,j} + E_{j,i}$  et  $E_{i,i}$  sont symétriques et car  $S_n(\mathbf{K})$  est un sous-espace.
- Soit  $S \in S_n(\mathbf{K})$ . On a :

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^n s_{i,i}E_{i,i} \in \text{Vect}((E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}, (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n})$$

On a donc aussi l'inclusion directe.

- On remarque ensuite que la famille  $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n} \# (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$  est libre (on considère une combinaison linéaire nulle et on a immédiatement la nullité des coefficients, en s'appuyant sur le caractère libre de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ).
- Il reste alors à compter le nombre des éléments de cette famille qui est une base de  $S_n(\mathbf{K})$  :

$$\dim S_n(\mathbf{K}) = \sum_{i=1}^n (n-i) + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Q4.** — Montrer que  $T_n^{++}(\mathbf{K})$  est quasi-nilpotent dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Vérifier que :

$$\dim T_n^{++}(\mathbf{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et donc :

$$\forall T \in T_n^{++}(\mathbf{K}), \text{Sp}(T) = \{0\}.$$

Ceci montre que  $T_n^{++}(\mathbf{K})$  est quasi-nilpotent. D'après la question précédente,

$$T_n^{++}(\mathbf{K}) = \text{Vect}((E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}).$$

La famille  $((E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n})$  étant libre (sous-famille de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ), c'est une base de  $T_n^{++}(\mathbf{K})$  et

$$\dim T_n^{++}(\mathbf{K}) = \sum_{i=1}^n (n-i) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Q5. —** Soit  $A \in A_n(\mathbf{R})$ . Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ ,  $X^\top A X = 0$ . En déduire que  $A_n(\mathbf{R})$  est quasi-nilpotent dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

- Notons que si  $X, Y \in M_{n,1}(\mathbf{R})$ ,  $X^\top Y$  peut s'interpréter comme le produit scalaire  $\langle X, Y \rangle$  de  $X$  et  $Y$  vus comme éléments de  $\mathbf{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique.  
Soit  $A \in A_n(\mathbf{R})$  et soit  $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$ . On a :

$$X^\top A X = \langle X, A X \rangle = \langle A X, X \rangle = (A X)^\top X = X^\top A^\top X = -X^\top A X .$$

On en déduit donc que  $X^\top A X = 0$ .

- En particulier, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé alors :

$$0 = X^\top A X = \lambda \|X\|^2 .$$

et comme  $X \neq 0$  (vecteur propre),  $\lambda = 0$ . Ainsi 0 est donc la seule valeur propre réelle possible pour  $A$ . On a montré que  $A_n(\mathbf{R})$  est quasi-nilpotent.

**Q6. —** Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbf{R})$  telle que :

$$A_n(\mathbf{R}) = \{P M P^{-1} : M \in T_n^{++}(\mathbf{R})\} .$$

*Indication : on pourra commencer par étudier le cas  $n = 2$ , en utilisant par exemple la matrice  $D$  introduite en Q1.*

Comme  $n \geq 2$ , on peut considérer la matrice  $M$  définie par blocs par  $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$ . On a :

$$\chi_M = X^{n-2} \times \chi_D = X^{n-2} \times (X^2 + 1) .$$

et le spectre complexe de  $M$  est soit égal à  $\{i, -i\}$  (cas  $n = 2$ ) soit égal à  $\{0, i, -i\}$  (cas  $n \geq 3$ ). Si, par l'absurde, il existait une matrice  $P$  comme dans l'énoncé,  $M$  serait semblable dans  $\mathbf{R}$  à un élément de  $T_n^{++}(\mathbf{R})$  et donc à une matrice dont 0 est la seule valeur propre complexe. La similitude dans  $\mathbf{R}$  entraînant immédiatement celle dans  $\mathbf{C}$  ( $GL_n(\mathbf{R}) \subset GL_n(\mathbf{C})$ ) et le spectre étant un invariant de similitude, on obtient une contradiction.

Il n'existe donc pas de  $P$  comme dans l'énoncé.

## 5. Cas réel

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

**Q7. —** Déterminer l'ensemble des matrices de  $S_n(\mathbf{R})$  qui sont quasi-nilpotentes dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Le résultat obtenu tient-il si on remplace  $\mathbf{R}$  par  $\mathbf{C}$ ?

- Soit  $S \in S_n(\mathbf{R})$ .  $S$  est alors diagonalisable (théorème spectral énoncé au début du sujet). Si 0 est sa seule valeur propre réelle possible,  $S$  est alors semblable à une matrice diagonale nulle et est donc nulle.
- Réciproquement, la matrice nulle de en format  $(n, n)$  est symétrique et quasi-nilpotente.
- En conclusion, la matrice nulle est ainsi la seule matrice symétrique quasi-nilpotente.

- La question 2 montre que le résultat est faux dans le cas complexe (on a trouvé une matrice symétrique complexe quasi-nilpotente qui n'est pas nulle).

**Q8.** — Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , quasi-nilpotent dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Dédurre de la question précédente que :

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , quasi-nilpotent dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . D'après la question précédente  $V \cap S_n(\mathbf{R}) = \{0\}$ . Donc  $V$  et  $S_n(\mathbf{R})$  sont en somme directe. Ainsi :

$$\dim V \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) - \dim S_n(\mathbf{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

## 6. Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier  $n$ .

**Q9.** — Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas  $n = 1$ .

La seule matrice quasi-nilpotente de  $\mathcal{M}_1(\mathbf{K})$  est la matrice nulle (puisque une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient). Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas  $n = 1$ .

Dans la suite, on fixe un entier naturel  $n \geq 2$  et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier  $n-1$ . On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent  $V$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . On raisonne par l'absurde en supposant que  $C_j(V) \neq \{0\}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On introduit le sous-ensemble  $V'$  de  $V$  constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice  $M$  de  $V'$  s'écrit donc par blocs comme suit :

$$M = \left( \begin{array}{c|c} K(M) & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline L(M) & 0 \end{array} \right).$$

**Q10.** — Montrer que l'ensemble  $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$  est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ .

Un calcul de déterminant par blocs montre que si  $M \in V'$  alors :

$$\chi_M = X \times \chi_{K(M)}.$$

Les valeurs propres non nulles de  $M \in V'$  et celles de  $K(M)$  sont donc les mêmes. Si  $V'$  est quasi-nilpotent alors  $K(V')$  l'est aussi.

**Q11.** — En déduire qu'il existe un entier  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $E_{n,j} \in V$ .

- D'après l'hypothèse de récurrence appliqué à  $K(V')$  (sous-espace de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ ), il existe un élément  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tel que  $C_j(K(V')) = \{0\}$ .
- D'après l'hypothèse du raisonnement par l'absurde, il existe une matrice  $M$  non nulle dans  $C_j(V)$ . Comme  $j < n$ ,  $M \in V'$  et donc  $K(M) \in K(V')$ .
- Comme  $M \in C_j(V)$ , on a aussi  $K(M)$  qui a toutes ses colonnes nulles sauf peut-être la  $j$ -ème. Finalement,  $K(M) \in C_j(K(V'))$  et donc  $K(M) = 0$ .
- La matrice  $M$  a ainsi une unique colonne qui peut être non nulle (celle numéro  $j$ ) et seul le dernier coefficient de cette colonne peut être non nul. Comme  $M \neq 0$ , il existe  $c \neq 0$  tel que  $M = c \cdot E_{n,j}$ .
- Enfin,  $V'$  est un sous-espace vectoriel et :

$$E_{n,j} = \frac{1}{c} \cdot M \in V' \subset V.$$

Soit  $\sigma$  une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{K}^n$ . On considère l'application linéaire  $u_\sigma$  de  $\mathbf{K}^n$  dans  $\mathbf{K}^n$  définie sur la base canonique par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}.$$

On considère la matrice  $P_\sigma$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  :

$$P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Q12.** — Vérifier que  $u_\sigma$  est inversible et préciser son inverse.

- L'application linéaire  $u_\sigma$  transforme la base  $(e_1, \dots, e_n)$  en  $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$  qui est aussi une base. Cette application linéaire est donc un isomorphisme de  $\mathbf{K}^n$ .
- L'application  $(u_\sigma)^{-1}$  envoie  $e_{\sigma(i)}$  sur  $e_i$  pour tout  $i$  et donc  $e_k$  sur  $e_{\sigma^{-1}(k)}$  pour tout  $k$ . On a donc :

$$(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}.$$

**Q13.** — Vérifier que  $P_\sigma$  est la matrice de  $u_\sigma$  dans la base canonique de  $\mathbf{K}^n$ . Montrer que  $P_\sigma$  est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

La colonne  $j$  de la matrice de  $u_\sigma$  dans la base canonique est la colonne  $e_{\sigma(j)}$ . Elle a tous ses coefficients nuls sauf celui en ligne  $\sigma(j)$ . Son coefficient générique est donc  $\delta_{i, \sigma(j)}$ . On a donc :

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u_\sigma) = P_\sigma.$$

On en déduit que  $P_\sigma$  est inversible et que :

$$(P_\sigma)^{-1} = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u_\sigma^{-1}) = P_{\sigma^{-1}} = (\delta_{i, \sigma^{-1}(j)})_{1 \leq i, j \leq n} = (\delta_{\sigma(i), j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

*Remarque.* On vérifie aisément que les applications :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\text{GL}(\mathbf{K}^n), \circ) \\ \sigma & \longmapsto & u_\sigma \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\text{GL}_n(\mathbf{K}), \times) \\ \sigma & \longmapsto & P_\sigma \end{array} \right.$$

sont des morphismes de groupes liés par la relation :

$$\psi = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\cdot) \circ \varphi.$$

**Q14.** — Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , préciser les coefficients de  $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$  en fonction de ceux de  $M$  et de  $\sigma$ . On pourra utiliser un changement de base.

Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbf{K}^n$  canoniquement associé à  $M$ .  $P_\sigma$  étant la matrice de changement de base de  $(e_1, \dots, e_n)$  à  $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ , d'après la formule de changement de base :

$$P_\sigma^{-1}MP_\sigma = \text{Mat}_{(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}(g).$$

Le coefficient à l'intersection des colonne  $j$  et ligne  $i$  est la coordonnée sur  $e_{\sigma(i)}$  de  $g(e_{\sigma(j)})$ . Or :

$$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^n m_{k, \sigma(j)} e_k = \sum_{l=1}^n m_{\sigma(l), \sigma(j)} e_{\sigma(l)}.$$

Finalement :

$$P_\sigma^{-1}MP_\sigma = (m_{\sigma(i), \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Q15.** — Montrer que l'ensemble :

$$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1}MP_\sigma \mid M \in V\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et que  $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- L'ensemble  $V^\sigma$  est l'image de  $V$  par l'application linéaire :

$$f \mid \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & P_\sigma^{-1}MP \end{array}$$

et donc est un espace vectoriel.

- Le spectre étant un invariant de similitude, le caractère quasi-nilpotent des éléments de  $V$  entraîne celui de ceux des éléments de  $V^\sigma$  et  $V^\sigma$  est un sous-espace quasi-nilpotent de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .
- Enfin, fixons  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . D'après l'hypothèse du raisonnement par l'absurde, on peut trouver  $M$  non nulle dans  $C_{\sigma(k)}(V)$ . Si  $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a en particulier  $m_{\ell, c}$  qui est nul si  $c \neq \sigma(k)$  ce que l'on peut écrire  $m_{\sigma(\ell), \sigma(c)} = 0$  si  $\sigma(c) \neq \sigma(k)$  ou encore si  $c \neq k$ . La matrice  $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$  est donc dans  $C_k(V^\sigma)$ . Elle est non nulle car  $M$  l'est (et  $f$  est un isomorphisme). On a montré que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad C_k(V^\sigma) \neq \{0\}.$$

**Q16.** — En déduire que pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on peut choisir un  $f(j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}$  tel que  $E_{j, f(j)} \in V$ . On obtient ainsi une fonction :

$$f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket.$$

- Les espaces  $V^\sigma$  et  $V$  ont les mêmes propriétés (sous-espaces quasi-nilpotents tels que pour tout  $k$ ,  $C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$ ). Pour tout  $\sigma$ , on peut donc appliquer la question 11 à  $V^\sigma$  et dire qu'il existe  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tel que  $E_{n, k} \in V_\sigma$  ou encore que  $P_\sigma E_{n, k} P_\sigma^{-1} \in V$ .
- D'après la question 14, pour tout choix de  $\sigma$  on a  $P_\sigma^{-1}E_{u, v}P_\sigma = E_{\sigma^{-1}(u), \sigma^{-1}(v)}$  (en effet en notant  $N = P_\sigma^{-1}E_{u, v}P_\sigma$ , on a  $N_{i, j}$  qui est égal au coefficient  $(\sigma(i), \sigma(j))$  de  $E_{u, v}$  et est nul sauf si  $\sigma(i) = u$  et  $\sigma(j) = v$ ).
- En appliquant ceci avec  $\sigma^{-1}$ , on a donc  $P_\sigma E_{n, k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n), \sigma(k)}$ .
- Fixons  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Appliquons ceci avec  $\sigma$  la bijection qui se contente de permuter  $j$  et  $n$  en laissant les autres éléments invariants (c'est l'identité si  $j = n$  et la transposition  $(j \ n)$  sinon). On trouve alors  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tel que  $E_{\sigma(n), \sigma(k)} = E_{j, \sigma(k)} \in V$ . On a bien sûr  $\sigma(k) \neq j$  car  $k \neq n$ .

et  $\sigma$  est une bijection qui envoie déjà  $n$  sur  $j$ .

- On a prouvé que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \exists f(j) \neq j \quad E_{j, f(j)} \in V.$$

**Q17.** — En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie  $(j_1, \dots, j_p)$  d'éléments deux à deux distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \quad f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1.$$

- Posons  $i_1 = 1$  et, pour tout  $k \geq 2$ ,  $i_k = f(i_{k-1})$ .
- L'ensemble  $\{i_k : k \in \mathbf{N}^*\}$  est inclus dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et donc fini. Or,  $\mathbf{N}^*$  est infini. Il existe donc deux  $i_k$  égaux pour des valeurs de  $k$  différentes :  $i_a = i_b$  avec  $a < b$ .
- En partant de  $i_a$  et en itérant successivement par  $f$ , on finit par retomber sur  $i_a$ .
- On regarde la première fois où on retrouve  $i_a$  et ce n'est pas à la première itération car  $f(j) \neq j$  pour tout  $j$ . On trouve des indices  $i_a, i_{a+1}, \dots, i_{a+p-1}$  avec  $p \geq 2$  deux à deux distincts images successifs les uns des autres par  $f$  et avec  $f(i_{a+p-1}) = f(i_a)$ .
- En posant  $j_1 = i_a, j_2 = i_{a+1}, \dots, j_p = i_{a+p-1}$ , on a des éléments deux à deux distincts et :

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \quad f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1.$$

**Q18.** — Écrire un code Python qui permet d'identifier une telle suite connaissant les valeurs de  $f$ .

On applique le procédé décrit ci-dessus. On gère un tableau  $t$  de booléens à  $n+1$  cases numérotées à partir de 0 et dont la case 0 sera inutile (mais cela permet de respecter la notation python). Initialement toutes les cases valent False. On part de 1 et on pose  $t[1]=\text{True}$  puis on calcule  $f(1)$  et on regarde, grâce au tableau  $t$ , si cette valeur a déjà été détectée. Si c'est le cas, cela signifie que l'on a un cycle de  $f(1)$  à lui même. Sinon, on met la valeur True dans  $t[f(1)]$  (on a rencontré l'élément  $f(1)$ ) et on recommence avec  $f(1)$  en calculant donc  $f(f(1))$ . On gère ainsi une variable  $i$  qui prend successivement les valeurs  $1, f(1), \dots$ .

```
t=[False]*(n+1)
i=1
while not(t[f(i)]):
    t[f(i)]=True
    i=f(i)
```

À ce niveau, il y a une boucle de  $i$  vers lui même quand on itère par  $f$  et il suffit de partir de  $i$  et d'itérer en stockant jusqu'à retomber sur  $i$ .

```
l=[i]
k=f(i)
while k!=i:
    l.append(k)
    k=f(k)
return(l)
```

**Q19.** — Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice  $N = \sum_{k=1}^p E_{j_k, f(j_k)}$  et conclure.

- La matrice  $N$  comporte  $p$  valeurs non nulles qui sont égales à 1. Il y a un coefficient 1 sur chaque ligne  $j_1, \dots, j_p$  et aussi un sur chaque colonne  $f(j_1), \dots, f(j_p) = j_2, \dots, j_p, j_1$ .
- On en déduit que le vecteur  $\sum_{k=1}^p e_{j_k}$  est propre pour  $N$  associé à la valeur propre 1.
- Ceci est contradictoire car  $N \in V$  (comme somme d'éléments de  $V$  qui est un espace vectoriel) et ne devrait posséder aucune valeur propre non nulle. Ceci clôt le raisonnement par l'absurde.

## 7. Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel  $n \geq 2$  et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang  $n - 1$ . Soit  $V$  un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice  $M \in M_n(\mathbf{K})$ , et en particulier de  $V$ , sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications  $K: V \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$  et  $L: V \rightarrow \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$  sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel :

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}.$$

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que  $C_n(V) = \{0\}$ .

**Q20.** — Montrer que  $\dim V \leq \dim K(W) + (n - 1)$ .

- Considérons l'application :

$$\Phi \left| \begin{array}{lcl} V & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & (K(M), L(M)) \end{array} \right.$$

- Si  $\Phi(M) = 0$  alors  $L(M) = 0$  et  $K(M) = 0$ . Or  $C_n(V) = 0$  et ces conditions impliquent donc que  $M = 0$ . Le noyau de  $\Phi$  est égal à  $\ker(K) \cap \ker(L)$  et  $\Phi$  (qui est linéaire) est injective. On a ainsi :

$$\dim V = \dim \text{Im}(\Phi) = \dim \Phi(V).$$

- On peut trouver un supplémentaire  $W'$  de  $W$  dans  $V$  et on a (par injectivité de  $\Phi$ ) :

$$\Phi(V) = \Phi(W) \oplus \Phi(W').$$

- On a  $\Phi(W) = \{(K(M), L(M)) : M \in W\} = \{(K(M), 0) : M \in W\}$  qui est isomorphe à  $K(W)$  et donc de même dimension.
- $W = \ker(L)$  et, par théorème du rang,  $W'$  est isomorphe à  $L(V)$  qui est de dimension inférieure ou égale à  $n - 1$ .  $\Phi(W')$  qui est isomorphe à  $W'$  est donc aussi de dimension inférieure à  $n - 1$ .
- Finalement :

$$\dim V = \dim \Phi(V) \leq \dim K(W) + n - 1.$$

**Q21.** — En déduire que  $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$ .

- Soit  $M \in W$ . On a  $M = \begin{pmatrix} K(M) & R(M) \\ 0 & a(M) \end{pmatrix}$  qui est quasi nilpotente (car dans  $V$ ) et ses valeurs propres sont celles de  $K(M)$  et  $a(M)$ . Ainsi  $K(M)$  n'a pas de valeur propre non nulle (et  $a(M) = 0$ ).
- Ceci montre que l'espace vectoriel  $K(W)$  est quasi-nilpotent.
- D'après l'hypothèse de récurrence, sa dimension est plus petite que  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . La question précédente donne alors :

$$\dim V \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On ne suppose plus désormais que  $C_n(V) = \{0\}$ .

**Q22.** — Démontrer que  $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$ .

D'après le lemme des colonnes, il existe  $j$  tel que  $C_j(V) = \{0\}$ . Considérons la transposition  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  qui échange  $j$  et  $n$ . L'espace  $V^\sigma$  est alors isomorphe à  $V$  et est un espace vectoriel quasi-nilpotent auquel on peut appliquer le cas précédent. On a donc :

$$\dim V = \dim V^\sigma \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$