

Devoir maison n°4 ★

1. Notations	1
2. Théorème spectral	1
3. Objectifs	2
4. Exemples	2
5. Cas réel	3
6. Lemme des colonnes	3
7. Cas général	4

1. Notations

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i, j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée $M^\top$.

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.

On note $S_n(\mathbf{K})$, $A_n(\mathbf{K})$ et $T_n^{++}(\mathbf{K})$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.

On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers,

$$\Delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y ; \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Définition 1. — *Etant donné un entier naturel non nul n , un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et un élément j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j -ème.*

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ avec $n \geq 2$, on notera $K(M) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$, $R(M) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{K})$, $L(M) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ et $a(M) \in \mathbf{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array} \right). \quad (1)$$

On a en particulier défini des fonctions $K : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$, évidemment linéaires.

2. Théorème spectral

On pourra appliquer le théorème suivant, admis aujourd'hui, mais démontré plus tard dans l'année.

Théorème (spectral). — *Pour toute matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$, il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $S = P D P^{-1}$ et $P^{-1} = P^\top$.*

3. Objectifs

Définition 2. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est **quasi-nilpotente** lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbf{K}$. Une partie V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **quasi-nilpotente** lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suite.

Théorème (dimension des espaces quasi-nilpotents). — Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a :

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}. \quad (\text{QN})$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie 6.

Lemme (des colonnes). — Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_j(V) = \{0\}$.

4. Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q1. — Montrer que la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$?

Q2. — Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

Q3. — Montrer que $S_n(\mathbf{K})$, $A_n(\mathbf{K})$ et $T_n^{++}(\mathbf{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que la dimension de $S_n(\mathbf{K})$ est $n(n+1)/2$.

Q4. — Montrer que $T_n^{++}(\mathbf{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Vérifier que :

$$\dim T_n^{++}(\mathbf{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Q5. — Soit $A \in A_n(\mathbf{R})$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X^\top A X = 0$. En déduire que $A_n(\mathbf{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q6. — Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$A_n(\mathbf{R}) = \{PMP^{-1} : M \in T_n^{++}(\mathbf{R})\}.$$

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite en Q1.

5. Cas réel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Q7. — Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Le résultat obtenu tient-il si on remplace $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$?

Q8. — Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Dédurre de la question précédente que :

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

6. Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n .

Q9. — Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline L(M) & 0 \end{array} \right).$$

Q10. — Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$.

Q11. — En déduire qu'il existe un entier $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^n$ définie sur la base canonique par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}.$$

On considère la matrice P_σ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:

$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Q12. — Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

Q13. — Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

Q14. — Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ . On pourra utiliser un changement de base.

Q15. — Montrer que l'ensemble :

$$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1}MP_\sigma \mid M \in V\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q16. — En déduire que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on peut choisir un $f(j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$. On obtient ainsi une fonction :

$$f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Q17. — En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1, \dots, j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \quad f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1.$$

Q18. — Écrire un code Python qui permet d'identifier une telle suite connaissant les valeurs de f .

Q19. — Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^p E_{j_k, f(j_k)}$ et conclure.

7. Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $M \in M_n(\mathbf{K})$, et en particulier de V , sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K : V \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : V \rightarrow \mathcal{M}_{1, n-1}(\mathbf{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel :

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}.$$

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que $C_n(V) = \{0\}$.

Q20. — Montrer que $\dim V \leq \dim K(W) + (n-1)$.

Q21. — En déduire que $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0\}$.

Q22. — Démontrer que $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$.