

Un corrigé du devoir maison n°3

1. Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables sur $\mathbf{R}$ versus sur $\mathbf{C}$	1
2. Codiagonalisation	2
3. Comparaison de deux normes sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$	7
4. Caractérisation de la convexité par les milieux des cordes	9

1. Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables sur $\mathbf{R}$ versus sur $\mathbf{C}$

Soient un entier $n \geq 2$ et $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$M_1 = P M_2 P^{-1} \quad [M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{C})] .$$

Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définies par, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$[A]_{k,\ell} := \operatorname{Re}([P]_{k,\ell}) \quad \text{et} \quad [B]_{k,\ell} := \operatorname{Im}([P]_{k,\ell})$$

de sorte que $P = A + iB$.

1. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \det(A + zB) \end{array} \right.$$

n'est pas identiquement nulle sur $\mathbf{R}$.

- L'application f est l'application polynomiale associée au polynôme :

$$P := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n ([A]_{k,\sigma(k)} + [B]_{k,\sigma(k)} X) \in \mathbf{C}[X]$$

i.e., pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = P(z)$.

- Raisonnons pas l'absurde et supposons que l'application f est nulle sur $\mathbf{R}$.

Le polynôme P possède alors une infinité de racines, d'où $P = 0_{\mathbf{C}[X]}$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = P(z) = 0$.

Ceci contredit :

$$0 \neq \det(P) = \det(A + iB) = f(i) .$$

2. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$M_1 = Q M_2 Q^{-1} \quad [M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})] .$$

- De l'hypothèse $M_1 = P M_2 P^{-1}$, nous déduisons $M_1 P = P M_2$, qui se réécrit :

$$M_1 A + i M_1 B = A M_2 + i B M_2 .$$

En considérant les parties réelles (resp. parties imaginaires) coefficient par coefficient, il vient :

$$(\star) \quad M_1 A = A M_2 \quad \text{et} \quad M_1 B = B M_2 .$$

- D'après la question précédente, il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $f(t) \neq 0$, i.e. tel que :

$$Q := A + t B \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}).$$

- À l'aide de $(\star)$ nous calculons :

$$M_1 Q = M_1 (A + t B) = M_1 A + t M_1 B = A M_2 + t B M_2 = (A + t B) M_2 = Q M_2.$$

En multipliant chacun des membres de l'identité $M_1 Q = Q M_2$ par Q^{-1} à droite, il vient $M_1 = Q M_2 Q^{-1}$.

2. Codiagonalisation

Soient $\mathbf{K}$ un corps et E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- l'endomorphisme u est diagonalisable ;
- tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E qui est stable par u .

- *Implication (a) $\implies$ (b).* — Supposons l'endomorphisme u diagonalisable.

Il existe donc une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E , formée de vecteurs propres pour u .

Considérons un sous-espace vectoriel F de E et une base $(f_1, \dots, f_p)$ de celui-ci.

D'après le théorème de la base incomplète, la famille libre $(f_1, \dots, f_p)$ peut être complétée en une base de E en ajoutant certains des vecteurs $e_1, \dots, e_n$. Précisément, il existe $i_1, \dots, i_{n-p} \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que :

$$(f_1, \dots, f_p, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-p}})$$

est une base de E .

Le sous-espace vectoriel $G := \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-p}})$ vérifie $\dim(G) = n - p$.

De plus, d'après la formule de Grasmann et $F + G = E$:

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) && [\text{formule de Grasmann}] \\ &= p + (n - p) - n && [F + G = E] \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $F \cap G = \{0_E\}$.

Nous en déduisons que G est un supplémentaire de F dans E .

Notons $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{n-p}}$ les valeurs propres associées respectivement aux vecteurs propres $e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-p}}$. Alors :

$$u(G) = \text{Vect}(u(e_{i_1}), \dots, u(e_{i_{n-p}})) = \text{Vect}(\lambda_{i_1} e_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{n-p}} e_{i_{n-p}}) \subset G$$

donc G est stable par u .

- *Implication (b) $\implies$ (a).* — Nous supposons que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E qui est stable par u et nous introduisons une base quelconque $(f_1, \dots, f_n)$ de E .

Nous allons construire, de proche en proche, une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de E , dont l'existence livrera la diagonalisabilité de u (par cardinalité-dimension cette famille sera une base de E).

- Par hypothèse, l'hyperplan $\text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-1})$ possède une droite $\text{Vect}(e_1)$ supplémentaire qui est stable par u .

Le vecteur e_1 est donc un vecteur propre de u et la famille (e_1) est une famille libre formée d'un vecteur propre de u .

- Supposons que nous disposons d'une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs propres de u , où $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

D'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons compléter la famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ en une base de E , en ajoutant certains des vecteurs $f_1, \dots, f_n$. Précisément, il existe $i_1, \dots, i_{n-p} \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que :

$$(e_1, \dots, e_p, f_{i_1}, \dots, f_{i_{n-p}})$$

est une base de E .

Par hypothèse, l'hyperplan $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_{i_1}, \dots, f_{i_{n-p-1}})$ possède une droite $\text{Vect}(e_{p+1})$ supplémentaire qui est stable par u .

Le vecteur e_{p+1} est donc un vecteur propre de u .

Nous en déduisons que la famille :

$$(e_1, \dots, e_p, f_{i_1}, \dots, f_{i_{n-p-1}}, e_{p+1})$$

est une base de E .

La famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ est donc une famille libre de $(p+1)$ vecteurs propres de E .

Ainsi, de proche en proche, nous construisons une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de E .

Comme son cardinal égale la dimension de E , cette famille est une base de E .

L'endomorphisme u est donc diagonalisable (la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est diagonale).

- *Remarque.* — En analysant la démonstration de (b) $\implies$ (a) rédigée ci-dessus, nous remarquons que nous avons démontré l'assertion suivante.

Si tout hyperplan de E possède un supplémentaire dans E stable par u , alors u est diagonalisable.

4. Soient u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Démontrer que l'endomorphisme induit :

$$u_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est diagonalisable.

- *Stratégie.* — Nous allons démontrer que tout sous-espace vectoriel de F possède un supplémentaire dans F stable par u_F , ce qui livrera la diagonalisabilité de l'endomorphisme u_F de F d'après la question précédente.
- *Introduction d'un sous-espace vectoriel G de F .* — Soit G un sous-espace vectoriel de F .
- *Construction d'un supplémentaire de G dans E stable par u .* — Comme G est également un sous-espace vectoriel de E et u est diagonalisable, la question précédente nous fournit

un supplémentaire H de F dans E , qui est stable par u . Ainsi :

$$E = G \oplus H \quad \text{et} \quad H \text{ est stable par } u.$$

- *Le sous-espace vectoriel $F \cap H$ de F convient.* — Nous allons démontrer que $F \cap H$ est un supplémentaire de G dans F stable par u_F , ce qui achèvera la démonstration.
 - Comme F et H sont stables par u , le sous-espace vectoriel $F \cap H$ de F est stable par u_F .
 - Comme $\{0_E\} \subset (F \cap H) \cap G \subset H \cap G = \{0_E\}$, les sous-espaces vectoriels $F \cap H$ et G de F sont en somme directe.
 - Soit $f \in F$. Comme $E = G \oplus H$, il existe $g \in G$ et $h \in H$ tels que $f = g + h$. Nous en déduisons :

$$h = f - g \in F \quad [f, g \text{ appartiennent à } F \text{ stable par combinaison linéaire}] .$$

Ainsi $h \in F \cap H$ et f est somme d'un élément de G et d'un élément de $F \cap H$.

Ceci étant vrai pour un élément f quelconque de F , il vient :

$$F \subset G + (F \cap H) .$$

L'inclusion réciproque est évidente car G et $F \cap H$ sont des sous-espaces vectoriels de F .

- *Remarque.* — On dispose d'un résultat analogue pour les endomorphismes trigonalisables, qui s'énonce comme suit.

Si u est un endomorphisme trigonalisable de E et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est également trigonalisable.

En effet, si u est trigonalisable, alors χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$. Comme χ_{u_F} divise χ_u dans $\mathbf{K}[X]$, χ_{u_F} est également scindé sur $\mathbf{K}$. Nous en déduisons que u_F est trigonalisable sur $\mathbf{K}$.

5. Soient un entier $p \geq 2$ et $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes diagonalisables de E . Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.

- Les endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ commutent deux à deux.
- Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ est diagonale.

- *Implication (b) $\implies$ (a).* — Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n)$ sont diagonales.

Soient i et j deux entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme des matrices diagonales commutent entre elles :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i \circ u_j) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j \circ u_i) .$$

Comme la matrice d'un endomorphisme de E dans la base $\mathcal{B}$ détermine cet endomorphisme, nous en déduisons que $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

- *Implication (a) $\implies$ (b).* — Nous allons raisonner par récurrence pour démontrer que,

pour tout entier $p \geq 2$:

$$\mathcal{H}(p) \quad \left| \begin{array}{l} \text{« Pour tout K-espace vectoriel } E, \text{ pour tous } u_1, \dots, u_p \text{ endomorphismes} \\ \text{diagonalisables de } E \text{ qui commutent deux à deux, il existe une base } \mathcal{B} \\ \text{de } E \text{ formée de vecteurs de } E, \text{ qui sont propres pour chacun des} \\ \text{endomorphismes } u_1, \dots, u_p. \text{ »} \end{array} \right.$$

ce qui établira l'implication.

— *Initialisation* à $p = 2$. Soient E un K-espace vectoriel et u_1, u_2 deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u_1 .

Comme u_1 et u_2 commutent, u_2 stabilise les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u_1), \dots, E_{\lambda_r}(u_1)$ de u_1 .

D'après la question précédente, les endomorphismes :

$$u_{2|E_{\lambda_1}(u_1)}, \dots, u_{2|E_{\lambda_r}(u_1)}$$

induits par u_2 sur $E_{\lambda_1}(u_1), \dots, E_{\lambda_r}(u_1)$ sont diagonalisables.

Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe donc une base $\mathcal{B}_k$ de $E_{\lambda_k}(u_1)$ formée de vecteurs propres pour l'endomorphisme $u_{2|E_{\lambda_k}(u_1)}$ de $E_{\lambda_k}(u_1)$, donc formée de vecteurs propres pour l'endomorphisme u_2 de E .

Comme les vecteurs des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ appartiennent à des sous-espaces propres pour u_1 et sont non nuls, tous ses vecteurs sont non seulement propres pour u_2 , mais encore propres pour u_1 .

La diagonalisabilité de u_1 nous livre :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(u).$$

Ainsi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \# \dots \# \mathcal{B}_r$ est une base de E formée de vecteurs propres à la fois pour u_1 et pour u_2 .

L'assertion $\mathcal{H}(2)$ est établie.

— *Hérédité*. Soit un entier $p \geq 2$ tel que $\mathcal{H}(p)$ est vraie.

Soient E un K-espace vectoriel et $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ des endomorphismes diagonalisables de E qui commutent deux à deux.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u_1 .

Comme u_1 commute avec tous les endomorphismes $u_2, \dots, u_{p+1}$, ces p endomorphismes $u_2, \dots, u_{p+1}$ de E stabilisent les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u_1), \dots, E_{\lambda_r}(u_1)$ de u_1 .

Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Nous déduisons de la question précédente que les p endomorphismes de $E_{\lambda_k}(u_1)$:

$$u_{2|E_{\lambda_k}(u_1)}, \dots, u_{p+1|E_{\lambda_k}(u_1)}$$

induits par $u_2, \dots, u_{p+1}$ sur $E_{\lambda_k}(u_1)$ sont diagonalisables.

Comme ces p endomorphismes de $E_{\lambda_k}(u_1)$ commutent deux à deux (les p endomorphismes $u_2, \dots, u_{p+1}$ de E commutent deux à deux), l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(p)$ nous livre l'existence d'une base $\mathcal{B}_k$ de $E_{\lambda_k}(u_1)$ formée de vecteurs propres pour les p endomorphismes :

$$u_{2|E_{\lambda_k}(u_1)}, \dots, u_{p+1|E_{\lambda_k}(u_1)}$$

de $E_{\lambda_k}(u_1)$, donc formée de vecteurs propres pour les p endomorphismes $u_2, \dots, u_{p+1}$ de E .

Comme les vecteurs des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ appartiennent à des sous-espaces propres pour u_1 et sont non nuls, tous ses vecteurs sont non seulement propres pour $u_2, \dots, u_{p+1}$, mais encore propres pour u_1 .

La diagonalisabilité de u_1 nous livre :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(u).$$

Ainsi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \# \dots \# \mathcal{B}_r$ est une base de E formée de vecteurs propres pour les $(p+1)$ endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ de E .

L'assertion $\mathcal{H}(p+1)$ est établie.

- *Remarque.* — On dispose également d'un résultat de cotrigonalisation pour des endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux. Il s'énonce comme suit.

Si $p \geq 2$ et $u_1, \dots, u_p$ sont des endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux à deux, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ est triangulaire supérieure.

6. Soient un entier $p \geq 2$ et $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices diagonalisables sur $\mathbf{K}$. Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.

(a) Les matrices $A_1, \dots, A_p$ commutent deux à deux.

(b) Il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $P^{-1}A_iP$ est diagonale.

- *Implication (a) $\implies$ (b).* — Supposons que les matrices $A_1, \dots, A_p$ commutent deux à deux.

Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, u_i l'endomorphisme :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & A_i X \end{array} \right.$$

de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associé à la matrice A_i , qui vérifie $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_i) = A_i$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. Nous calculons :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_i \circ u_j) = \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_i)}_{=A_i} \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_j)}_{=A_j} = \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_j)}_{=A_j} \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_i)}_{=A_i} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_j \circ u_i).$$

Comme un endomorphisme de E est entièrement déterminé par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, nous en déduisons $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

Comme les endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ commutent deux à deux, la question précédente nous livre l'existence d'une base $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ telle que les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u_1), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u_p)$ soient diagonales.

Si on pose $P := P_{\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{C}} \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$, le théorème de changement de base nous apprend que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$P^{-1}A_iP = P^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_i)P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u_i) \text{ est une matrice diagonale.}$$

- *Implication (b) $\implies$ (a).* — Supposons qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $D_i := P^{-1}A_iP$ est diagonale.

Comme les matrices $D_1, \dots, D_p$ sont diagonales, elles commutent deux à deux.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. Nous calculons :

$$A_i A_j = P D_i P^{-1} P D_j P^{-1} = P D_i D_j P^{-1} = P D_j D_i P^{-1} = P D_j P^{-1} P D_i P^{-1} = A_j A_i .$$

- *Remarque.* — On dispose également d'un résultat de cotrigonalisation pour des matrices trigonalisables qui commutent deux à deux. Il s'énonce comme suit.

Si $p \geq 2$ et $A_1, \dots, A_p$ sont des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent deux à deux, alors il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $P^{-1} A_i P$ est triangulaire supérieure.

En particulier, puisque toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on dispose du résultat suivant.

Si $p \geq 2$ et $A_1, \dots, A_p$ sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent deux à deux, alors il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $P^{-1} A_i P$ est triangulaire supérieure.

3. Comparaison de deux normes sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$

Posons $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 \, dx} .$$

7. Démontrer que N est une norme sur E .

Nous allons démontrer que l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) \longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x) \, dx \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur E et nous en déduisons que :

$$N \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ f \longmapsto \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 \, dx} \end{array} \right.$$

est une norme sur E , en tant que norme associée à un produit scalaire.

- *Linéarité à gauche.* — Soient $(f_1, f_2, g) \in E^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$.

Nous calculons, grâce à la linéarité de la dérivation :

$$\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = (\lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0))g(0) + \int_0^1 (\lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x))g'(x) \, dx .$$

Grâce à la linéarité de l'intégrale, nous en déduisons que $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle$ égale :

$$\lambda_1 \left(f_1(0)g(0) + \int_0^1 f_1'(x)g'(x) \, dx \right) + \lambda_2 \left(f_2(0)g(0) + \int_0^1 f_2'(x)g'(x) \, dx \right)$$

qui s'écrit encore $\lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$.

- *Symétrie.* — Soit $(f, g) \in E^2$.

Par commutativité de la multiplication dans $\mathbf{R}$, il vient :

$$\underbrace{f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x) \, dx}_{\langle f, g \rangle} = \underbrace{g(0)f(0) + \int_0^1 g'(x)f'(x) \, dx}_{\langle g, f \rangle}.$$

- *Linéarité à droite.* — Elle découle de la linéarité à gauche et de la symétrie.
- *Positivité.* — Soit $f \in E$.

Un carré de nombre réel est positif ou nul et l'intégrale vérifie la propriété de positivité. Nous en déduisons que :

$$\langle f, f \rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 \, dx \geqslant 0.$$

- *Caractère défini.* — Soit $f \in E$ telle que :

$$\langle f, f \rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 \, dx = 0.$$

Si une somme de nombres réels positifs ou nuls est nulle, alors tous ses termes sont nuls. Ainsi :

$$f(0)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'(x)^2 \, dx = 0.$$

La fonction $(f')^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur le segment $[0, 1]$. Elle est donc identiquement nulle sur ce dernier. Avec l'intégrité de $\mathbf{R}$, nous obtenons alors que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f' = 0.$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \, dt = 0.$$

8. Existe-t-il une constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N(f) \leqslant \alpha \|f\|_\infty$?

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle constante α existe.

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et f_n la fonction de E définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^n. \end{array} \right.$$

Par hypothèse :

$$\sqrt{\frac{n^2}{2n-1}} = N(f_n) \leqslant \alpha \|f_n\|_\infty = \alpha.$$

Une contradiction est obtenue en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la précédente inégalité.

9. Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \beta N(f)$?

Fixons $f \in E$ et $x \in [0, 1]$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$|f(x)| = \left| f(0) + \int_0^x f'(t) \, dt \right|.$$

Grâce à l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue et pour l'intégrale, il vient :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| \, dt.$$

La fonction $|f'|$ étant positive sur le segment $[0, 1]$, nous en déduisons que :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \, dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})}$ usuel sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ nous livre :

$$\int_0^1 |f'(t)| \, dt = \langle |f'|, \tilde{1} \rangle_{\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})} \leq \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 \, dt}.$$

En combinant les deux dernières inégalités obtenues, nous avons :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 \, dt}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{R}^2}$ usuel sur $\mathbf{R}^2$ offre alors :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \, dt = \left\langle \left(|f(0)|, \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 \, dt} \right), (1, 1) \right\rangle_{\mathbf{R}^2} \leq \underbrace{\sqrt{2}N(f)}_{\text{indépendant de } x \in [0, 1]}.$$

Par passage à la borne supérieure sur les réels $x \in [0, 1]$, il vient :

$$\|f\|_{\infty} \leq \sqrt{2}N(f).$$

4. Caractérisation de la convexité par les milieux des cordes

10. Démontrer que l'ensemble :

$$\mathcal{D} := \left\{ \frac{n}{2^p} : p \in \mathbf{N} \text{ et } n \in \llbracket 0, 2^p \rrbracket \right\}$$

est dense dans $[0, 1]$.

Soit $x \in [0, 1]$.

Nous allons construire une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers x , en mimant la construction de l'approximation décimale d'un réel par défaut, exposée dans le cours.

- *Construction de la suite $(x_p)_{p \in \mathbf{N}}$.* — Pour tout $p \in \mathbf{N}$, posons :

$$x_p := \frac{\lfloor 2^p x \rfloor}{2^p}.$$

- *Les termes de la suite $(x_p)_{p \in \mathbf{N}}$ appartiennent à $\mathcal{D}$.* — Soit $p \in \mathbf{N}$. Comme $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq 2^p x \leq 2^p.$$

D'après la croissance de la fonction partie entière, nous en déduisons que :

$$0 \leq \lfloor 2^p x \rfloor \leq 2^p.$$

Le nombre x_p appartient donc à $\mathcal{D}$.

- *La suite $(x_p)_{p \in \mathbf{N}}$ converge vers x .* — Soit $p \in \mathbf{N}$. On rappelle l'inégalité fondamentale vérifiée par la partie entière de $2^p x$:

$$2^p x - 1 < \lfloor 2^p x \rfloor \leq 2^p x.$$

En divisant membre à membre par $2^p > 0$, il vient :

$$x - \frac{1}{2^p} < x_p \leq x.$$

D'après le théorème d'encadrement, $x_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x$.

11. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Démontrer que la fonction f est convexe.

D'après la question précédente et la continuité de la fonction f , il suffit de démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \llbracket 0, 2^p \rrbracket \quad f\left(\frac{n}{2^p}x + \frac{2^p - n}{2^p}y\right) \leq \frac{n}{2^p}f(x) + \frac{2^p - n}{2^p}f(y).$$

Nous allons établir que, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$\underbrace{\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall n \in \llbracket 0, 2^p \rrbracket \quad f\left(\frac{n}{2^p}x + \frac{2^p - n}{2^p}y\right) \leq \frac{n}{2^p}f(x) + \frac{2^p - n}{2^p}f(y)}_{\mathcal{H}(p)}$$

en raisonnant par récurrence, ce qui conclura.

- *Initialisation à $p = 0$.* — Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

— Si $n = 0$ alors :

$$f\left(\frac{n}{2^0}x + \frac{2^0 - n}{2^0}y\right) = f(y) \leq f(y) = \frac{n}{2^0}f(x) + \frac{2^0 - n}{2^0}f(y).$$

— Si $n = 1$ alors :

$$f\left(\frac{n}{2^0}x + \frac{2^0 - n}{2^0}y\right) = f(x) \leq f(x) = \frac{n}{2^0}f(x) + \frac{2^0 - n}{2^0}f(y).$$

Donc :

$$\forall n \in \llbracket 0, 2^0 \rrbracket \quad f\left(\frac{n}{2^0}x + \frac{2^0 - n}{2^0}y\right) \leq \frac{n}{2^0}f(x) + \frac{2^0 - n}{2^0}f(y).$$

L'assertion $\mathcal{H}(0)$ est établie.

- *Hérédité.* — Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que l'assertion $\mathcal{H}(p)$ soit vraie.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \llbracket 0, 2^{p+1} \rrbracket$.

— Supposons que n est pair et écrivons $n = 2q$ où q est un entier.

Nécessairement $q \in \llbracket 0, 2^p \rrbracket$.

Alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2q}{2^{p+1}}x + \frac{2^{p+1} - 2q}{2^{p+1}}y\right) &= f\left(\frac{q}{2^p}x + \frac{2^p - q}{2^p}y\right) \\ &\leq \frac{q}{2^p}f(x) + \frac{2^p - q}{2^p}f(y) \quad [\mathcal{H}(p)] \\ &= \frac{2q}{2^{p+1}}f(x) + \frac{2^{p+1} - 2q}{2^{p+1}}f(y) \end{aligned}$$

— Supposons que n est impair et écrivons $n = 2q + 1$ où q est un entier.

Nécessairement $2q \in \llbracket 0, 2^{p+1} \rrbracket$.

Remarquons que :

$$f\left(\frac{2q+1}{2^{p+1}}x + \frac{2^{p+1} - (2q+1)}{2^{p+1}}y\right)$$

égale :

$$f\left(\frac{\frac{2q}{2^p}x + \frac{2^p - 2q}{2^p}y}{2} + \frac{\frac{1}{2^p}x + \frac{2^p - 1}{2^p}y}{2}\right) \quad [2^p + 2^p = 2^{p+1}].$$

D'après l'hypothèse faite sur la fonction f , nous en déduisons que

$f\left(\frac{2q+1}{2^{p+1}}x + \frac{2^{p+1} - (2q+1)}{2^{p+1}}y\right)$ est inférieure ou égal à :

$$\frac{f\left(\frac{2q}{2^p}x + \frac{2^p - 2q}{2^p}y\right)}{2} + \frac{f\left(\frac{1}{2^p}x + \frac{2^p - 1}{2^p}y\right)}{2}.$$

En appliquant deux fois $\mathcal{H}(p)$, il vient que $f\left(\frac{2q+1}{2^{p+1}}x + \frac{2^{p+1} - (2q+1)}{2^{p+1}}y\right)$ est inférieure ou égal à :

$$\frac{2q}{2^{p+1}}f(x) + \frac{2^p - 2q}{2^{p+1}}f(y) + \frac{1}{2^{p+1}}f(x) + \frac{2^p - 1}{2^{p+1}}f(y).$$

qui est égal à $\frac{2q+1}{2^{p+1}}f(x) + \frac{2^{p+1} - (2q+1)}{2^{p+1}}f(y)$.

L'assertion $\mathcal{H}(p+1)$ est ainsi établie.