

Devoir maison n°3

pour le vendredi 17 octobre

1. Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables sur $\mathbf{R}$ versus sur $\mathbf{C}$	1
2. Codiagonalisation	1
3. Comparaison de deux normes sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$	2
4. Caractérisation de la convexité par les milieux des cordes	2

1. Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables sur $\mathbf{R}$ versus sur $\mathbf{C}$

Soient un entier $n \geq 2$ et $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$M_1 = P M_2 P^{-1} \quad [M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{C})] .$$

Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définies par, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$[A]_{k,\ell} := \operatorname{Re}([P]_{k,\ell}) \quad \text{et} \quad [B]_{k,\ell} := \operatorname{Im}([P]_{k,\ell})$$

de sorte que $P = A + iB$.

1. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \det(A + zB) \end{array} \right.$$

n'est pas identiquement nulle sur $\mathbf{R}$.

2. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$M_1 = Q M_2 Q^{-1} \quad [M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})] .$$

2. Codiagonalisation

Soient $\mathbf{K}$ un corps et E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) l'endomorphisme u est diagonalisable ;
- (b) tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E qui est stable par u .

4. Soient u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Démontrer que l'endomorphisme induit :

$$u_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est diagonalisable.

5. Soient un entier $p \geq 2$ et $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes diagonalisables de E . Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.

- (a) Les endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ commutent deux à deux.
- (b) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ est diagonale.

6. Soient un entier $p \geq 2$ et $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices diagonalisables sur $\mathbf{K}$. Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.

- (a) Les matrices $A_1, \dots, A_p$ commutent deux à deux.
- (b) Il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $P^{-1} A_i P$ est diagonale.

3. Comparaison de deux normes sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$

Posons $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 \, dx}.$$

7. Démontrer que N est une norme sur E .
8. Existe-t-il une constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N(f) \leq \alpha \|f\|_\infty$?
9. Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \beta N(f)$?

4. Caractérisation de la convexité par les milieux des cordes

10. Démontrer que l'ensemble :

$$\mathcal{D} := \left\{ \frac{n}{2^p} : p \in \mathbf{N} \text{ et } n \in \llbracket 0, 2^p \rrbracket \right\}$$

est dense dans $[0, 1]$.

11. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Démontrer que la fonction f est convexe.