

Un corrigé du devoir maison n°2 — Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

1. Notations et définitions	1
2. Résultats préliminaires	1
3. Applications	2
4. Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$	4
5. Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$	5
6. Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$	7

Ce sujet est issu d'une épreuve de 3 heures du concours ESIM (École Supérieure d'Ingénieurs de Marseille) 2002.

1. Notations et définitions

Étant donnés n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q carrée inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.

A étant un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, on appelle noyau de A , noté $\text{Ker}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) : AX = 0\}.$$

On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$, noté $\text{Im}(A)$:

$$\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\}.$$

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$ est appelé un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall M \in J, \quad MA \in J.$$

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$ est appelé un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall M \in J, \quad AM \in J.$$

Si J est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que J est un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre n .

2. Résultats préliminaires

Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose A de rang r .

Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Q1. — Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ une base du noyau de u . Démontrer l'existence d'une famille de vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ telle que $(e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathbf{R}^n$.

- On sait que $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = r$ supposé supérieur ou égal à 1. D'après le théorème du rang, $\text{Ker}(u)$ est de dimension $n - r$. Il est donc légitime de considérer une base de $\text{Ker}(u)$ notée $(e_{r+1}, \dots, e_n)$.
- Cette famille étant libre dans $\mathbf{R}^n$, on sait qu'on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$.

Q2. — Démontrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$.

D'après le cours, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, alors en notant $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, on sait que $\mathbf{R}^n = F \oplus \text{Ker}(u)$, ce qui exprime que F est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$.

Q3. — En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est isomorphe à $\text{Im}(u)$.

- Considérons l'application :

$$\tilde{u} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \text{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

qui est linéaire, comme restriction et corestriction d'une application linéaire.

- Comme $\text{Ker}(\tilde{u}) = \text{Ker}(u) \cap F = \{0\}$, l'application $\tilde{u}$ est injective.
- Comme F et $\text{Im}(u)$ ont même dimension finie r , l'application $\tilde{u}$ est bijective.
- Ainsi $\tilde{u}$ est un isomorphisme de F sur $\text{Im}(u)$.

Q4. — En déduire que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(u)$.

- D'après la question précédente, l'image par $\tilde{u}$ de la base $(e_1, \dots, e_r)$ de F est donc une base de $\text{Im}(u)$.
- Comme, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $e_i \in F$ on a $\tilde{u}(e_i) = u(e_i)$. Ainsi $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(u)$.

Q5. — Peut-on compléter la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ en une base de $\mathbf{R}^n$?

La famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ étant libre dans $\mathbf{R}^n$, on sait qu'on peut la compléter en une base $\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n)$ de $\mathbf{R}^n$.

Q6. — En déduire que A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et 0 une matrice nulle de taille convenable.

- Notons $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$, Q la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{C}$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$. Puisque $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$, le théorème de changement de base livre $A = QBP^{-1}$.
- D'autre part, par construction des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbf{R}^n$, la matrice B est de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice diagonale notée D_r .
- Ainsi A est équivalente à D_r .

Q7. — Soit D une matrice diagonale d'ordre n telle que r éléments de la diagonale sont égaux à 1, les $n - r$ autres sont nuls. Démontrer que A est équivalente à D .

- La matrice D est de rang r . D'après la question précédente, elle est aussi équivalente à D_r .
- La relation d'équivalence des matrices d'ordre n étant symétrique et transitive, on obtient que A est semblable à toutes les matrices du type de D .

3. Applications

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Q8. — Démontrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(A)$ est non nul.

Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Si $f(A) = 0$ alors pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$f(B) = f(BA^{-1}A) = f(BA^{-1})f(A) = 0$$

ce qui contredit que $f \neq 0$. Donc $f(A) \neq 0$.

Soit A une matrice de rang r , strictement inférieur à n .

Q9. — Démontrer l'existence de $r + 1$ matrices, notées $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1 A_2 \dots A_{r+1}$ soit nul.

- Posons $A_{r+1} = D_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on choisit A_k diagonale avec r coefficients diagonaux égaux à 1 les $n - r$ autres étant égaux à 0 dont celui d'indice (k, k) .
 - Toutes les A_k pour $k \in \llbracket 1, r + 1 \rrbracket$ sont équivalentes à A d'après la question 7.
 - Leur produit B est une matrice diagonale.
 - Si $1 \leq k \leq r$, alors $[B]_{k,k} = 0$ car $[A_k]_{k,k} = 0$.
 - Si $r + 1 \leq k \leq n$, alors $[B]_{k,k} = 0$ car $[A_{r+1}]_{k,k} = 0$.
- Ainsi $B = A_1 A_2 \dots A_{r+1} = 0_n$, où 0_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q10. — En déduire que $f(A) = 0$.

- Comme :

$$f(0_n) = f(0_n \times 0_n) = f(0_n) \times f(0_n)$$

il vient $f(0_n) = 0$ ou 1.

- Si on avait $f(0_n) = 1$, alors on aurait, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$1 = f(0_n) = f(0_n \times B) = f(0_n) f(B) = f(B)$$

ce qui contredit que $f \neq 1$. Donc $f(0_n) = 0$.

- Nous en déduisons que :

$$f(A_1) f(A_2) \dots f(A_{r+1}) = f(A_1 A_2 \dots A_{r+1}) = 0$$

donc un des réels $f(A_k)$ est nul.

- Comme la matrice A_k est équivalente à A , il existe deux matrices inversibles P_k et Q_k telles que $A_k = Q_k^{-1} A P_k$. Donc

$$f(Q_k^{-1}) f(A) f(P_k) = 0.$$

Mais $f(Q_k^{-1})$ et $f(P_k)$ sont non nuls d'après la question 8. Donc $f(A) = 0$.

Q11. — Que peut-on en conclure pour l'application f ?

- D'après ce qui précède, nous pouvons conclure que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad f(A) \neq 0 \iff A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}).$$

- De plus, f induit un morphisme de groupe multiplicatif $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ vers le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$. En particulier, $f(I) = 1$.

Q12. — Donner un exemple d'une telle application.

Un exemple de telle application est l'application déterminant de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$.

4. Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit J un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q13. — Démontrer que si $I \in J$, alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Si $I \in J$ alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$A = AI \in J.$$

- Nous en déduisons $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \subset J$ et par suite $J = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q14. — Démontrer que si J contient une matrice inversible alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Si J contient une matrice inversible A , alors :

$$I = A^{-1}A \in J$$

donc $J = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, d'après la question précédente.

On suppose que J n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à J .

Q15. — Démontrer que J contient la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- On a vu à la question 6 que A est équivalente à D_r . Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que $D_r = Q^{-1}AP$.
- J étant idéal à droite, $AP \in J$, puis étant idéal à gauche, $D_r = Q^{-1}(AP) \in J$.

Q16. — Démontrer l'existence de $n - r + 1$ matrices, notées $A_1, A_2, \dots, A_{n-r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

- Pour $k \in \llbracket 1, n - r + 1 \rrbracket$, on pose :

$$A_k = \text{Diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$[A_k]_{i,i} = 1 \iff k \leq i \leq k + r - 1$$

ce qui est possible car $k + r - 1 \leq (n - r + 1) + r - 1 = n$ (point essentiel).

- Toutes les A_k sont équivalentes à A d'après la question 7, donc sont toutes dans J d'après la solution apportée à la question précédente.
- On constate que $C = A_1 + \dots + A_{n-r+1}$ est diagonale et que ses éléments diagonaux sont tous des entiers supérieurs ou égaux à 1.
- Nous en déduisons que C est inversible et $C \in J$, car J est stable pour l'addition comme sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q17. — Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

- Puisque $C \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ et $C \in J$, on a $J = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, d'après la question 14.
- Ainsi le seul idéal bilatère non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- Les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont $\{0_n\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

5. Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$J_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : E \text{ contient } \text{Im}(A)\}.$$

Q18. — Démontrer que J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- J_E est non vide car contient 0_n .
- Si A et B sont deux éléments de J_E , alors $A - B \in J_E$ car $\text{Im}(A - B) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}(B) \subset E + E \subset E$.
- D'autre part, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $A \in J_E$, alors $AM \in J_E$ car $\text{Im}(AM) \subset \text{Im}(A) \subset E$.
- Nous avons démontré que J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{R})$. On suppose que $\text{Im}(B)$ est contenue dans $\text{Im}(A)$. On veut montrer qu'il existe une matrice C appartenant à $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ telle que $B = AC$.

On fixe un supplémentaire S de $\text{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$.

Q19. — Justifier que l'application ϕ définie par $X \mapsto AX$ définit un isomorphisme de S dans $\text{Im}(A)$.

- Il est clair que :

$$\phi \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \text{Im}(A) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

est linéaire et à valeurs dans $\text{Im}(A)$.

- L'application ϕ est injective car si $X \in \text{Ker}(\phi)$, alors $X \in S$ et $AX = 0$, donc $X \in S \cap \text{Ker}(A) = \{0\}$.
- L'application ϕ est surjective. En effet, soit $Y \in \text{Im}(A)$. Il existe donc $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ tel que $Y = AX$. Le vecteur X se décompose sous la forme :

$$X = X_1 + X_2 \text{ où } X_1 \in S \text{ et } X_2 \in \text{Ker}(A).$$

Alors $Y = AX_1 + AX_2 = AX_1 = \phi(X_1)$. Ainsi il existe $X_1 \in S$ tel que $Y = \phi(X_1)$.

- En résumé, ϕ définit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(A)$.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbf{R})$.

Q20. — Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q , d'un unique élément ε_i de S tel que :

$$A\varepsilon_i = Be_i.$$

Soit $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Alors :

$$Be_i \in \text{Im}(B) \subset \text{Im}(A).$$

D'après la question précédente, il existe $\varepsilon_i \in S$ tel que :

$$Be_i = \phi(\varepsilon_i)$$

c'est à dire $A\varepsilon_i = Be_i$.

Soit C l'élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont les matrices $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$:

$$C = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_q].$$

Q21. — Démontrer que $B = AC$.

- On a $C = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_q]$, donc :

$$AC = [A\varepsilon_1 \quad \dots \quad A\varepsilon_q] = [Be_1 \quad \dots \quad Be_q] = B$$

puisque Be_j représente la j -ième colonne de $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{R})$.

Soient A , B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\text{Im}(A) + \text{Im}(B)$ contient $\text{Im}(C)$.

On désigne par $D = (A, B)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,2n}(\mathbf{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B , c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières celles de B .

Q22. — Démontrer que $\text{Im}(D) = \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$.

- Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

$$Y \in \text{Im}(D) \iff \exists X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbf{R}) \quad Y = DX.$$

Or X peut s'écrire :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

avec X_1 et X_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Y \in \text{Im}(D) &\iff \exists (X_1, X_2) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}))^2 \quad Y = (A, B) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = AX_1 + BX_2 \\ &\iff Y \in \text{Im}(A) + \text{Im}(B). \end{aligned}$$

Q23. — En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathcal{M}_{2n,n}(\mathbf{R})$ telle que : $C = DW$.

D'après le résultat de la question 21, spécialisé à :

$$A \leftarrow D \quad B \leftarrow C \quad p \leftarrow 2n \quad q \leftarrow n$$

il existe $W \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbf{R})$ tel que $C = DW$.

Q24. — En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $C = AU + BV$.

La matrice W peut s'écrire :

$$W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

avec U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Ainsi :

$$C = (A, B) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = AU + BV.$$

Soit J un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q25. — Démontrer qu'il existe un entier naturel r tel que :

$$(\forall M \in J, \quad \text{rg}(M) \leq r) \quad \text{et} \quad (\exists M_0 \in J, \quad \text{rg}(M_0) = r).$$

Notons :

$$X := \{\text{rg}(M) : M \in J\}.$$

Il s'agit d'une partie non vide de $\mathbf{N}$ (car $J \neq \emptyset$) et majorée par n . Elle admet donc un plus grand élément noté r . Comme

$r \in X :$

$$\exists M_0 \in J \quad \text{rg}(M_0) = r.$$

Soit M un élément quelconque de J . On suppose que $\text{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\text{Im}(M_0)$.

Q26. — En utilisant le sous-espace vectoriel $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, démontrer l'existence d'un élément de J de rang strictement supérieur à r .

- Comme $\text{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\text{Im}(M_0)$, $\text{Im}(M_0)$ est inclus strictement dans $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$.
- On peut trouver une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\text{Im}(P) = \text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$, par exemple une matrice de projecteur sur $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$.
- D'après le résultat de la question 24 spécialisé à :

$$C \leftarrow P \quad A \leftarrow M \quad B \leftarrow M_0$$

il existe deux matrices U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $P = MU + M_0V$.

- Comme $M \in J$ et J est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $MU \in J$. De même $M_0V \in J$. Puisque J est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors :

$$P = MU + M_0V \in J.$$

Or :

$$\text{rg}(P) = \dim \text{Im}(P) > \dim \text{Im}(M_0) = r.$$

Q27. — Dédurre des questions précédentes que J est contenu dans $J_{\text{Im}(M_0)}$.

- Si J possède un élément M tel que $\text{Im}(M)$ n'est pas inclus dans $\text{Im}(M_0)$, alors le raisonnement de la question précédente livre une contradiction avec la définition de r .
- Donc :

$$\forall M \in J, \quad \text{Im}(M) \subset \text{Im}(M_0)$$

ce qui signifie que $J \subset J_{\text{Im}(M_0)}$.

Q28. — Démontrer que $J = J_{\text{Im}(M_0)}$.

- Soit $M \in J_{\text{Im}(M_0)}$. Alors $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(M_0)$.
- D'après le résultat de la question 21 spécialisé à :

$$B \leftarrow M \quad A \leftarrow M_0$$

il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $M = M_0C$. Comme $M_0 \in J$ et J est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $M \in J$.

- Avec la question précédente, il vient $J = J_{\text{Im}(M_0)}$.

- Conclusion. Les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont les parties de la forme

$$J_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : \text{Im}(A) \subset E\}$$

où E est un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Pour $E = \{0\}$, alors $J_E = \{0_n\}$ et pour $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, alors $J_E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (seuls idéaux bilatères).

6. Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$J_E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : \text{Ker}(M) \text{ contient } E\}.$$

Q29. — Démontrer que J_E est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- J_E est non vide car contient 0_n .
- Si A et B sont deux éléments de J_E , alors $A - B \in J_E$, car $E \subset \text{Ker}(A)$ et $E \subset \text{Ker}(B)$, donc :

$$E \subset \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(A - B).$$

- D'autre part, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $A \in J_E$, alors $MA \in J_E$ car $E \subset \text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(MA)$.
- Nous avons donc établi que J_E est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On désigne par u une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, v une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^q$.

On suppose que $\text{Ker}(v)$ contient $\text{Ker}(u)$.

Q30. — Démontrer qu'il existe un homomorphisme w de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ tel que : $v = w \circ u$.

- *Première preuve exploitant les dimensions finies.*

Posons $r = \text{rg}(u)$ et $s = \text{rg}(v)$. On a :

$$r = n - \dim \text{Ker}(u) \geq n - \dim \text{Ker}(v) = s.$$

Soit $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(u)$. On la complète en $(e_{s+1}, \dots, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(v)$, puis on complète en :

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_{r+1}, \dots, e_n)$$

une base de $\mathbf{R}^n$.

En reprenant la démonstration faite à la question 4, on montre de même que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(u)$. On la complète en une base :

$$\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_p)$$

de $\mathbf{R}^p$.

Soit w l'application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ déterminée sur la base $\mathcal{C}$ par :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad w(u(e_i)) = v(e_i)$$

et

$$\forall i \in \llbracket r+1, p \rrbracket, \quad w(f_i) = 0.$$

Pour vérifier que $v = w \circ u$, il suffit de se placer sur la base $\mathcal{C}$ de $\mathbf{R}^p$. On a déjà :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad w(u(e_i)) = v(e_i).$$

Si $j \in \llbracket r+1, p \rrbracket$, alors $u(e_j) = 0$, donc $v(e_j) = 0$ car $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v)$ et l'égalité $w(u(e_j)) = v(e_j)$ est encore vraie.

- *Deuxième preuve plus générale.*

Soit F un supplémentaire de $\text{Im}(u)$ dans $\mathbf{R}^p$. Notons p la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à F .

Soit $y \in \mathbf{R}^p$. Comme $p(y) \in \text{Im}(u)$, donc il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $p(y) = u(x)$. Posons $w(y) = v(x)$ avec $p(y) = u(x)$.

Cette définition de $w(y)$ ne dépend pas de l'antécédent x de $p(y)$ par u . En effet, si x' est un autre antécédent, alors $u(x) = u(x')$, donc $u(x - x') = 0$, d'où a fortiori $v(x - x') = 0$ puisque $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v)$ et ainsi $v(x) = v(x')$.

On vient donc de définir une application w de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$.

Comme, pour tout $x \in \mathbf{R}^p$, $y = u(x) \in \text{Im}(u)$, il vient $p(y) = y$. Donc x est un antécédent de $p(y)$ par u et, par définition de w , on a $w(y) = v(x)$, c'est à dire $w(u(x)) = v(x)$, ce qui prouve que :

$$v = w \circ u.$$

Il reste à démontrer w est linéaire. Soient y_1 et y_2 deux éléments de $\mathbf{R}^p$, λ un réel, x_1 et x_2 des antécédents respectifs de $p(y_1)$ et de $p(y_2)$ par u . Par définition de w , on a : $w(y_1) = v(x_1)$ et $w(y_2) = v(x_2)$. Or :

$$p(\lambda \cdot y_1 + y_2) = \lambda \cdot p(y_1) + p(y_2) = \lambda \cdot u(x_1) + u(x_2) = u(\lambda \cdot x_1 + x_2).$$

En utilisant à nouveau la définition de w , on obtient :

$$w(\lambda \cdot y_1 + y_2) = v(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot v(x_1) + v(x_2) = \lambda \cdot w(y_1) + w(y_2).$$

Q31. — Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbf{R})$ telles que $\text{Ker}(B)$ contient $\text{Ker}(A)$. Dédurre de la question précédente qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{R})$ telle que $B = CA$.

- Il suffit de considérer l'élément $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ (resp. $v \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^q)$) associé canoniquement à $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ (resp. $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbf{R})$).
- D'après la question précédente, il existe $w \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ tel que $v = w \circ u$.
- En notant C la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{R})$ représentant w relativement aux bases canoniques de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$, on a $B = CA$.

Soient A , B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que $\text{Ker}(C)$ contient $\text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B)$.

Q32. — Démontrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n , U et V , telles que $C = UA + VB$.

- Considérons la matrice :

$$D := \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbf{R}).$$

- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(D) &\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} AX \\ BX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff AX = 0 \text{ et } BX = 0 \\ &\iff X \in \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B). \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(D) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B)$.

- Puisque $\text{Ker}(D) \subset \text{Ker}(C)$, d'après le résultat de la question 31 spécialisé à :

$$A \leftarrow D \quad B \leftarrow C \quad p \leftarrow 2n \quad q \leftarrow n$$

il existe $G \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbf{R})$ tel que $C = GD$. En écrivant :

$$G = (U, V)$$

avec U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on obtient :

$$C = (U, V) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = UA + VB.$$

Q33. — Déterminer les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Soit J un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

— Posons :

$$X = \{\dim \text{Ker}(M) : M \in J\}$$

est une partie non vide de $\mathbf{N}$ minorée par 0. Elle admet donc un plus petit élément noté s et il existe $M_0 \in J$ tel que $\dim \text{Ker}(M_0) = s$.

— Soit $M \in J$. Nous souhaitons prouver que $\text{Ker}(M_0) \subset \text{Ker}(M)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\text{Ker}(M_0)$

n'est pas inclus dans $\text{Ker}(M)$.

Alors $\text{Ker} M \cap \text{Ker}(M_0)$ est inclus strictement dans $\text{Ker}(M_0)$. Considérons un élément $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le noyau est $\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M_0)$ par exemple une matrice de projecteur parallèlement à $\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M_0)$. Puisque $\text{Ker}(Q) = \text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M_0)$, d'après la question 32, il existe U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $Q = UM + VM_0$. Comme M et M_0 sont dans J et que J est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a $Q \in J$. Or :

$$\dim \text{Ker}(Q) < \dim \text{Ker}(M_0) = s$$

ce qui contredit la définition de s .

— En résumé :

$$\forall M \in J, \quad \text{Ker}(M_0) \subset \text{Ker}(M)$$

donc $J \subset J_{\text{Ker}(M_0)}$.

— Réciproquement, si $M \in J_{\text{Ker}(M_0)}$, alors $\text{Ker}(M_0) \subset \text{Ker}(M)$. D'après le résultat de la question 31 spécialisé à :

$$A \leftarrow M_0 \quad M \leftarrow B \quad p \leftarrow n \quad q \leftarrow n$$

il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $M = CM_0$. Comme $M_0 \in J$ et J est un idéal à gauche, on a $M \in J$.

— Nous avons démontré que $J = J_{\text{Ker}(M_0)}$.

• Conclusion. Les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont les parties de la forme

$$J_E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : E \subset \text{Ker}(M)\}$$

où E est un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Pour $E = \{0\}$, $J_E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et pour $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $J_E = \{0_n\}$ (seuls idéaux bilatères).