

Devoir maison n°10

pour le mercredi 11 février

Espaces préhilbertiens réels

1. Un calcul d'orthogonal	1
2. Bases orthonormées, coordonnées et produit scalaire	1
3. Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et compacité du groupe orthogonal	2
4. Bases orthonormées et matrices orthogonales	3
5. Algorithme de Gram-Schmidt appliqué à une base de $\mathbf{R}^3$	3
6. Algorithme de Gram-Schmidt et décomposition d'Iwasawa	4
7. Identité de polarisation et isométrie vectorielle	4
8. Isométries vectorielles d'un plan euclidien	5
9. Inégalité de Cauchy-Schwarz	6
10. Projecteurs orthogonaux	6
11. Théorème de Riesz	7
12. Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ et systèmes linéaires homogènes	7
13. Bijectivité et réduction d'un endomorphisme mettant en jeu un produit scalaire	8
14. Inégalité de Bessel et familles totales	8

1. Un calcul d'orthogonal

Soient $E := \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ et l'application φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ll} E^2 & \longrightarrow \\ (f, g) & \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt \end{array} \right. \mathbf{R}.$$

On considère le sous-espace vectoriel $G := \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R}) : f'' = f\}$ de E .

Q1 Démontrer que φ est un produit scalaire sur E .

Q2 Déterminer une base de G .

Q3 Démontrer que :

$$\forall (f, g) \in E \times G \quad \varphi(f, g) = f(1)g'(1) - f(0)g'(0).$$

Q4 Démontrer que $G^\perp = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}$.

2. Bases orthonormées, coordonnées et produit scalaire

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Q5 Soit x un vecteur de E . Démontrer que :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i .$$



Dans un espace euclidien, les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée admettent une expression simple, en termes de produit scalaire.

Q6 Soient $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E , $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ des réels. Démontrer que :

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \langle u_i, v_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underbrace{\alpha_i \beta_j \langle u_i, v_j \rangle}_{\text{terme croisé}}$$

en détaillant le calcul et en justifiant chacune de ses étapes avec une propriété idoine du produit scalaire.

Q7 Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. On pose :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i .$$

Démontrer que :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$



Dans un espace euclidien, le produit scalaire de deux vecteurs admet une expression simple en fonction des coordonnées de ceux-ci dans une base orthonormée.

3. Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et compacité du groupe orthogonal

Soit un entier $n \geq 2$.

Q8 Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Donner une expression du réel $\text{tr}(A \times B^\top)$ en fonction des coefficients de A et B .

Q9 Démontrer que :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto \text{tr}(A \times B^\top) \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On rappelle que le groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est défini par :

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A \times A^\top = I_n\} .$$

Q10 Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

4. Bases orthonormées et matrices orthogonales

Soit un entier $n \geq 2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice dont les colonnes sont notées $C_1, \dots, C_n$. Ces dernières appartiennent au $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, que nous munissons de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q11 Justifier que $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.



Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Q12 Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E . Démontrer que la base $\mathcal{C}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id})$ appartient à $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.



Une matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale.

Q13 Soit $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Construire une base orthonormée $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de E telle que $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = A$.



Toute matrice orthogonale est une matrice de passage entre deux bases orthonormées.

5. Algorithme de Gram-Schmidt appliqué à une base de $\mathbf{R}^3$

On munit $\mathbf{R}^3$ de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On introduit trois vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbf{R}^3$ définis par :

$$u_1 = (0, 1, 1) \quad , \quad u_2 = (1, 0, 1) \quad , \quad u_3 = (1, 1, 0) .$$

Q14 Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Q15 Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ pour obtenir une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$, que nous noterons $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la suite.

Notons $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Q16 Explicitez la matrice $P := P_{\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{C}}$ puis calculer le produit $P \times P^\top$.

Q17 Commenter le résultat de la question précédente.

6. Algorithme de Gram-Schmidt et décomposition d'Iwasawa

Soit un entier $n \geq 2$.

On note $\mathcal{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. La norme associée est :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ X & \longmapsto \sqrt{X^\top \times X} \end{array} \right.$$

Soit A une matrice de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont notées $C_1, \dots, C_n$.

Q18 Justifier que la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Q19 En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(C_1, \dots, C_n)$ de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ démontrer que :

$$\exists (Q, R) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) \quad A = QR \quad [\text{décomposition d'Iwasawa}] .$$

Q20 Démontrer que la décomposition de A obtenue en **Q19** est unique.

Q21 Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \\ (Q, R) & \longmapsto QR \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme, i.e. que f est continue, bijective et que f^{-1} est continue. On pourra s'aider de la compacité de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ (cf. **Q10**) pour établir la continuité de f^{-1} .

Q22 Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Démontrer que :

$$|\det(C_1, \dots, C_n)| \leq \|C_1\| \times \dots \times \|C_n\| \quad [\text{inégalité de Hadamard}] .$$

7. Identité de polarisation et isométrie vectorielle

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array} \right.$$

la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q23 Rappeler l'identité de polarisation.

Soit f un endomorphisme de E .

On dit que f est une isométrie de E , si :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\| \quad [f \text{ préserve la norme}] .$$

Q24 Démontrer que f est une isométrie de E si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad [f \text{ préserve le produit scalaire}] .$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Q25 Démontrer que f est une isométrie de E si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Q26 Démontrer que f est une isométrie de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

Q27 Démontrer que :

$$f \text{ est une isométrie} \implies \det(f) \in \{-1, 1\}$$

mais que la réciproque est fausse.

8. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 2 et :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array} \right.$$

la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E , f une isométrie de E et $A := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbf{O}_2(\mathbf{R})$.

Supposons que $\det(f) = \det(A) = 1$, i.e. que $A \in \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$. D'après l'exercice 37 du chapitre « Structures algébriques » :

$$\exists ! \theta \in [0, 2\pi[\quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

i.e. :

$$f(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2 .$$

L'endomorphisme f est donc une rotation plane.

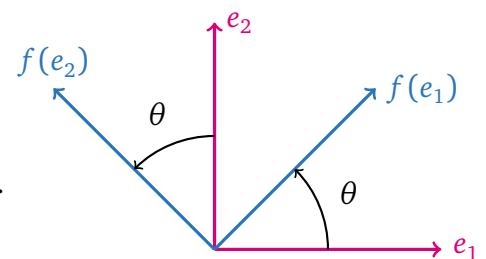
Dans la suite, nous supposons que $\det(f) = \det(A) = -1$ et nous nous proposons de décrire géométriquement f .

Q28 Démontrer que :

$$\exists ! \theta \in [0, 2\pi[\quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} .$$

Q29 Déterminer les éléments propres de la matrice A .

Q30 En déduire que f est une symétrie orthogonale, par rapport à une droite dont on précisera un vecteur directeur.



9. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Q31 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.

N.B. Il convient de connaître une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de son cas d'égalité.

Q32 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R}) : \forall x \in [a, b] \quad f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble :

$$\left\{ \int_a^b f(t) \, dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} \, dt : f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

Q33 Soient $(n, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Déterminer l'ensemble solution du système :

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n^k \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n^k \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

10. Projecteurs orthogonaux

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit p un projecteur de E .

Q34 Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- i. $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$
- ii. $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$

N.B. Un projecteur vérifiant l'une des deux assertions précédentes (donc les deux) est appelé projecteur orthogonal.

11. Théorème de Riesz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Q35 Justifier que, pour tout $x \in E$, l'application :

$$\langle x, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ y \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur E .

Q36 Démontrer que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbf{R}) \quad \exists ! x \in E \quad \varphi = \langle x, \cdot \rangle.$$

Q37 Soit H un hyperplan de E . Démontrer que :

$$\exists x \in E \quad H = x^\perp.$$

Le vecteur x est-il unique ?

Soit un entier $n \geq 2$ et H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$.

Q38 Démontrer qu'il existe un vecteur $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que H soit l'ensemble solution de l'équation linéaire homogène :

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \quad [\text{une équation de l'hyperplan } H]$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Soit un entier $m \in \mathbf{N}$.

Q39 Démontrer que :

$$\exists ! (a_0, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \quad \forall P \in \mathbf{R}_m[X] \quad \int_0^1 P(t) \, dt = \sum_{i=0}^m a_i P(i).$$

12. Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ et systèmes linéaires homogènes

Soit un entier naturel non nul n .

Q40 Soient un entier naturel non nul p et une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Démontrer que l'ensemble F solution du système linéaire homogène :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Q41 Que dire de la dimension de F ?

Nous venons de démontrer que l'ensemble solution d'un système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbf{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ (cf. **Q40**). Nous nous proposons de démontrer que, réciproquement, tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble solution d'un système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbf{R}^n$.

Q42 Rappeler la définition du produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$.

Q43 Soit φ une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$. Justifier que :

$$\exists ! (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n .$$

Q44 Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension p . Démontrer qu'il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n-p, n}(\mathbf{K})$ telle que G soit l'ensemble solution du système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + a_{n-p,2}x_2 + \dots + a_{n-p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

13. Bijectivité et réduction d'un endomorphisme mettant en jeu un produit scalaire

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et a, b des vecteurs unitaires de E . On considère l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x - \langle a, x \rangle b \end{array} \right.$$

Q45 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective, puis exprimer f^{-1} dans ce cas.

Q46 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

14. Inégalité de Bessel et familles totales

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $\|\cdot\|$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite orthonormale de vecteurs de E et $x \in E$.

Q47 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad [\text{inégalité de Bessel}] .$$

Q48 Justifier que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle^2$ est convergente.

On suppose de plus que la famille $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est totale, i.e. que $\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbf{N}})$ est une partie dense de E .

Q49 Démontrer que la série vectorielle $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge dans E et que :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n .$$

Q50 En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$.

Q51 Donner une famille orthonormale totale de l'espace $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel.