Devoir maison n°1

pour le lundi 1er septembre

► *Ce devoir est à résoudre* SEUL.E*, sans l'aide de camarade, d'IA ou autre. Je me baserai sur votre production personnelle pour vous épauler en début d'année. Il est donc important que* VOTRE *copie soit précisément de reflet de* VOTRE *travail, pour ne pas fausser le début de notre collaboration.*
► *Le sujet est long et comporte des questions de niveau varié, indiqué par les symboles ⋆ (application directe du cours), ⋆⋆ (prise d'initiative nécessaire) et ⋆⋆⋆ (délicat, voire fort délicat).*
► *Puisque je souhaite que vous résolviez ce devoir* SEUL.E *(l'ai-je déjà mentionné ☺?), il est possible que certaines questions vous résistent. Si cela vous arrivait,* CE NE SERAIT PAS DU TOUT UN SOUCI. *Vous pourriez alors m'indiquer votre temps de recherche, ainsi que les pistes que vous auriez explorées, en m'expliquant pourquoi elles vous auraient semblé infructueuses, à l'aide d'une phrase.*

1. Préambule

1.1. Sujets MPI et MPI*

Les étudiants de MPI résolvent les questions numérotées de 1 à 49, ceux de MPI* toutes les questions.

1.2. Soin

Les copies souffrant d'un manque de soin ne seront pas corrigées.

1.3. Copies doubles avec des marges qui resteront vierges

Vous composerez sur des copies doubles avec des marges. Aucun écrit ne figurera dans les marges ou les espaces vierges de lignes situés en haut ou en bas des pages. Ce point est particulièrement important pour que je dispose de place pour annoter votre travail.

1.4. Argumentation

Toute assertion sera justifiée avec soin, e.g. chaque inégalité.

1.5. Clarté : forme et fond

On attend des arguments clairs, reliés entre eux avec une logique soignée. Les textes opaques, manifestement écrits sans aider le lecteur à comprendre votre pensée, constituent une faiblesse majeure. Le verbiage est donc à proscrire. Les résultats seront encadrés avec une règle. J'attends des $\boxed{\text{cadres rectangulaires}}$ propres.

1.6. Précision

La précision de vos écrits est essentielle. Par exemple :

« D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe … »

sans aucune mention d'une fonction, de sa continuité, de son domaine de définition (qui doit être un intervalle) n'est pas recevable.

1.7. Théorèmes

Pour appliquer un théorème, il convient toujours de vérifier chacune de ses hypothèses avec soin. Ces dernières doivent se détacher du corps du texte, comme dans ce qui suit.

« Comme :
- la famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est libre ;
- la famille $(u_1, \dots, u_n)$ comporte $n = \dim(E)$ vecteurs ;

la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E. »

1.8. Liens logiques

Vos assertions doivent être articulées ensemble à l'aide de mots issus de la logique. On préférera le mot « donc » au symbole $\Longrightarrow$. Au passage, les deux ont un sens différent. Le symbole $\Longleftrightarrow$ n'est pas une décoration, mais une double implication ($\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$) qui doit être convenablement justifiée.

1.9. Modes de raisonnement

Cas échéant, il est conseillé d'indiquer le mode de raisonnement retenu (e.g. analyse-synthèse, récurrence, double implication) et de structurer la rédaction en conséquence. Les différentes parties du raisonnements doivent se détacher, e.g. :

$\boxed{\Longrightarrow}$ …

$\boxed{\Longleftarrow}$ …

1.10. Concision

Si vos réponses doivent être toujours argumentées, il faut veiller à ce qu'elles demeurent concises. Il est rare qu'il faille des pages et des pages pour offrir une solution élégante au lecteur.

2. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Prérequis.— trigonométrie, fonctions usuelles, primitives, intégration sur un segment, polynômes, espaces vectoriels, déterminants, espaces préhilbertiens.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction U_n par :

$$U_n : x \longmapsto \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}.$$

2.1. Ensemble de définition et continuité des fonctions U_n, où $n \in \mathbf{N}$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

⋆ **Q1. —** Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction U_n.

⋆ **Q2. —** Justifier que la fonction U_n est continue sur $\mathscr{D}$.

2.2. Relation de récurrence et expressions de U_0, U_1, U_2, U_3

⋆⋆ **Q3. —** Démontrer que :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \forall\, x \in \mathscr{D}, \quad U_n(x) = 2\,x\,U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

⋆ **Q4. —** Calculer les fonctions U_0, U_1, U_2, U_3.

2.3. Caractère polynomial des fonctions U_n, où $n \in \mathbf{N}$

⋆⋆ **Q5. —** Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, U_n est une fonction polynomiale de degré n, dont on précisera le coefficient dominant.

Comme l'ensemble $\mathscr{D}$ est infini, nous pouvons confondre, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le polynôme U_n et la fonction polynomiale associée.

⋆⋆⋆ **Q6. —** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le polynôme U_n, est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$.

2.4. Déterminants de matrices tridiagonales

⋆⋆ **Q7. —** Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathscr{D}, \quad U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2x & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2x \end{vmatrix} \quad [\text{déterminant d'une matrice de format } (n,n)]\,.$$

2.5. Un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ et une base orthonormale

⋆ **Q8. —** Démontrer que l'application :

$$\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^\pi P(\cos(\theta))\,Q(\cos(\theta))\,\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Nous munissons $\mathbf{R}[X]$ du produit scalaire défini en Q8, pour la suite.

⋆⋆ **Q9. —** Soit $(n,m) \in \mathbf{N}^2$. Justifier :

$$\forall\, \theta \in [0,\pi], \quad U_n(\cos(\theta))\,U_m(\cos(\theta))\,\sin^2(\theta) = \sin((n+1)\,\theta)\,\sin((m+1)\,\theta)\,.$$

⋆ **Q10. —** Démontrer que la famille $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}[X]$.

⋆ **Q11. —** Donner une base orthonormée de $\mathbf{R}[X]$.

2.6. Projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbf{R}_1[X]$

⋆⋆ **Q12. —** Calculer le le projeté orthogonal $p\left(X^2\right)$ de X^2 sur $\mathbf{R}_1[X]$ et la distance $\mathrm{d}\left(X^2, \mathbf{R}_1[X]\right)$ de X^2 à $\mathbf{R}_1[X]$.

3. Autour de la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire

Prérequis.— fonctions usuelles, continuité, dérivabilité, analyse asymptotique, séries numériques, convexité, espaces vectoriels, probabilités.

Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Nous définissons la fonction φ_X par :

$$\varphi_X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t} \ln\left(\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)\right). \end{array} \right.$$

3.1. Régularité de la fonction φ_X

⋆ **Q13. —** Démontrer que la fonction φ_X est bien définie sur $\mathbf{R}^*$.

⋆⋆ **Q14. —** Déterminer des réels a, b, c tels que :

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \underset{t\to 0}{=} a + b\,t + c\,t^2 + \mathrm{o}\left(t^2\right).$$

⋆ **Q15. —** Démontrer que la fonction φ_X est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$.

Dans la suite, nous notons (abusivement) φ_X le prolongement ainsi obtenu.

⋆ **Q16. —** Démontrer que la fonction φ_X est dérivable en 0 et exprimer $\varphi_X'(0)$ en fonction de la variance de X.

3.2. Liberté d'une famille de fonctions

⋆⋆⋆ **Q17. —** Démontrer que la famille $\left(e_\lambda \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} \end{array} \right.\right)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ de fonctions de $\mathscr{F}(\mathbf{R}^*, \mathbf{R})$ est libre.

3.3. Caractérisation de la loi de X grâce à la fonction φ_X

⋆⋆ **Q18. —** Soit $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Démontrer que les variables X et Y ont même loi si et seulement si les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.

3.4. La fonction $\varphi_{X_1+\ldots+X_n}$ lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes

⋆ **Q19. —** Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω. On pose $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Lier les fonctions φ_{S_n} et $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$, lorsque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

3.5. Calcul de φ_X lorsque X suit une loi binomiale

⋆ **Q20. —** Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times\,]0,1[$. Calculer la fonction φ_X lorsque $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, puis proposer une démonstration alternative des résultats du cours concernant l'espérance et la variance d'une loi binomiale.

3.6. Condition nécessaire et suffisante d'imparité de la fonction φ_X

⋆⋆⋆ **Q21. —** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur X pour que la fonction φ_X soit impaire.

3.7. Une domination de φ_X par une fonction affine sur $\mathbf{R}_+$ lorsque X prend des valeurs négatives

⋆⋆ **Q22. —** En appliquant une formule de Taylor, démontrer que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}_-, \quad e^t \leqslant 1 + t + \frac{t^2}{2}.$$

⋆⋆ **Q23. —** On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbf{R}_-$. Démontrer que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}_+, \quad \varphi_X(t) \leqslant \mathbf{E}(X) + \frac{t}{2}\,\mathbf{E}\left(X^2\right).$$

4. Une première approche de la réduction des matrices nilpotentes

Prérequis.— matrices, espaces vectoriels, dimension, applications linéaires, matrices en algèbre linéaire.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$. Si tel est le cas, nous définissons le nilindice de A, noté ν, par :

$$\nu := \min\left\{k \in \mathbf{N}^* \ : \ A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}\right\} .$$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, nous définissons la matrice $J_k \in \mathscr{M}_k(\mathbf{R})$ par :

$$J_k := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1} + E_{3,2} + \ldots + E_{k,k-1} .$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice nilpotente.

4.1. Majoration du nilindice d'une matrice nilpotente

⋆⋆ **Q24. —** Justifier qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $A^{\nu-1}X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$, puis démontrer que la famille :

$$\left(X, AX, \ldots, A^{\nu-1}X\right)$$

est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On pourra considérer des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ tels que $\lambda_0 X + \ldots + \lambda_{\nu-1} A^{\nu-1} X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$ et démontrer de proche en proche (ou mieux, par récurrence) que $\lambda_0 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_2 = 0 \ldots$

⋆ **Q25. —** En déduire une majoration de ν.

4.2. Réduction d'une matrice nilpotente de nilindice maximal

⋆⋆ **Q26. —** Supposons que $\nu = n$. Démontrer que les matrices A et J_n sont semblables. On pourra considérer l'application linéaire :

$$\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

dont la matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ coïncide avec A.

4.3. Réduction d'une matrice nilpotente de nilindice 2

⋆⋆⋆ **Q27. —** Supposons $\nu = 2$ et posons $r := \mathrm{rg}(A)$. Démontrer que A est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{diag}(\underbrace{J_2, \ldots, J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{\mathscr{M}_{n-2r}}(\mathbf{R})) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{3,4} + \ldots E_{2r-1,2r} .$$

5. Une intégrale convergente dont la valeur est la constante d'Euler

Prérequis.— suites numériques, séries numériques, analyse asymptotique, limites d'une fonction, primitives, intégration sur un segment.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la somme partielle H_n de la série harmonique, définie par :

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

5.1. Developpement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique

⋆⋆ **Q28. —** Démontrer que la série de terme général :

$$u_n := \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1)$$

converge.

⋆ **Q29. —** En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)\,.$$

5.2. Convergence d'une intégrale généralisée

Soit F la fonction définie par :

$$F \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\int_1^A \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \end{array} \right. .$$

⋆ **Q30. —** Démontrer que la fonction F est croissante.

⋆⋆ **Q31. —** Démontrer que la fonction F est majorée. On pourra commencer par justifier que :

$$\forall\, x \in [2,+\infty[\,, \quad \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\,.$$

⋆ **Q32. —** Justifier que la fonction F possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

5.3. Calcul de la valeur de l'intégrale généralisée

⋆⋆ **Q33. —** Démontrer que :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \gamma\,.$$

On pourra commencer par considérer les intégrales $I_n := \displaystyle\int_1^n \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$, où n est un entier supérieur ou égal à 2, et tisser un lien entre I_n, H_n et $\ln(n)$.

6. Développement(s) d'un réel en base β

Prérequis.— ensembles et applications, séries numériques, inégalités, arithmétique.

Soit β un nombre entier supérieur ou égal à 2.

6.1. Développement d'un entier naturel non nul en base β

Soit $N \in \mathbf{N}^*$.

⋆⋆ **Q34. —** Démontrer que :

$$\exists\, r(N) \in \mathbf{N}, \quad \exists\, \left(a_0, \ldots, a_{r(N)}\right) \in [\![0, \beta-1]\!]^{r(N)+1}, \quad a_{r(N)} \neq 0 \quad \text{et} \quad N = \sum_{k=0}^{r(N)} a_k\, \beta^k\,.$$

On pourra raisonner par récurrence forte.

⋆⋆⋆ **Q35. —** Démontrer l'unicité de la décomposition obtenue à la question précédente. On pourra raisonner par l'absurde, en considérant deux décompositions distinctes de l'entier N.

⋆⋆ **Q36. —** Démontrer que :

$$r(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \log_\beta(N)\,.$$

On pourra commencer par établir l'inégalité $\beta^{r(N)} \leqslant N \leqslant \beta^{r(N)+1} - 1$.

La décomposition :

$$N = \sum_{k=0}^{r(N)} a_k \, \beta^k$$

obtenue à la question 34 est appelée développement de l'entier $N \in \mathbf{N}^*$ en base β. Dans la suite du sujet, nous étudions la notion de développement en base β, non pas pour un entier naturel non nul N, mais pour un nombre réel appartenant à $[0,1[$. Cette fois-ci, ce sont toutes les puissances de β d'exposants négatifs qui vont nous être utiles et des phénomènes de convergence vont apporter une subtilité nouvelle.

6.2. Construction de l'application Φ qui à une suite de chiffres en base β associe un réel de $[0,1]$

⋆ **Q37. —** Soient $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in [\![0, \beta-1]\!]^{\mathbf{N}^*}$. Démontrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{\beta^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\beta^n} \in [0,1]$.

Soit Φ l'application définie par :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} [\![0,\beta-1]\!]^{\mathbf{N}^*} & \longrightarrow & [0,1] \\ c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} & \longmapsto & \Phi(c) := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\beta^n} \end{array} \right. .$$

6.3. De l'injectivité de l'application Φ

⋆ **Q38. —** Soit $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par $c_1 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $c_n = \beta - 1$. Calculer $\Phi(c)$.

⋆⋆ **Q39. —** L'application Φ est-elle injective ?

6.4. Développement propre d'un réel de $[0,1[$ en base β et surjectivité de l'application Φ

Soit $x \in [0,1[$. Nous posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$c_n(x) := \lfloor \beta^n \, x \rfloor - \beta \, \lfloor \beta^{n-1} \, x \rfloor .$$

⋆ **Q40. —** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $c_n(x) \in [\![0, \beta-1]\!]$.

⋆ **Q41. —** Calculer $c_1(x), c_2(x), c_3(x), c_4(x)$ lorsque $(\beta, x) = \left(10, \dfrac{1}{225}\right)$, puis comparer le développement décimal de x fourni par une machine et le nombre décimal $0,c_1(x)c_2(x)c_3(x)c_4(x)$.

⋆ **Q42. —** Calculer $c_1(x), c_2(x), c_3(x), c_4(x)$ lorsque $(\beta, x) = \left(15, \dfrac{1}{225}\right)$.

⋆⋆ **Q43. —** Soit $c(x) := (c_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$. Démontrer que $\Phi(c(x)) = x$.

La décomposition :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(x)}{\beta^n}$$

obtenue à la question 43 est appelée développement (propre) du réel $x \in [0,1[$ en base β.

⋆ **Q44. —** Démontrer que l'application Φ est surjective.

6.5. Construction de la bijection Ψ, restriction et corestriction de l'application Φ

On dit qu'une suite $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in [\![0, \beta-1]\!]^{\mathbf{N}^*}$ stationne à la valeur $\beta - 1$ si :

$$\exists N \in \mathbf{N}^*, \quad \forall n \geqslant N, \quad c_n = \beta - 1 .$$

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble défini par :

$$\mathscr{A} := \left\{ c \in [\![0,\beta-1]\!]^{\mathbf{N}^*} \ : \ \text{la suite } c \text{ ne stationne pas à la valeur } \beta - 1 \right\} .$$

⋆⋆⋆ **Q45. —** Justifier que, pour tout $c \in \mathscr{A}$, $\Phi(c) \in [0,1[$.

D'après la question 45, l'application :

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1[\\ c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} & \longmapsto & \Psi(c) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\beta^n} \end{array} \right. \qquad \text{[restriction et corestriction de l'application } \Phi\text{]}$$

est bien définie.

⋆⋆⋆ **Q46. —** Démontrer que l'application Ψ est injective. On pourra raisonner par l'absurde, en considérant deux suites distinctes $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathscr{A}$ et $d = (d_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathscr{A}$ telles que $\Psi(c) = \Psi(d)$.

⋆⋆ **Q47. —** Démontrer que, pour tout $x \in [0,1[$, $c(x) \in \mathscr{A}$, où $c(x)$ est la suite définie à la question 43. On pourra raisonner par l'absurde, en considérant un réel $x \in [0,1[$ tel que :

$$\exists N \in \mathbf{N}^*, \quad \forall n \geqslant N, \quad c_n(x) = \beta - 1$$

et prendre appui sur la question 43.

⋆ **Q48. —** En déduire que l'application Ψ est bijective et expliciter l'application Ψ^{-1}.

6.6. Une condition suffisante pour qu'un réel de $[0,1[$ soit rationnel *via* sont développement en base β

On dit qu'une suite $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in [\![0,\beta-1]\!]^{\mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang si :

$$\exists (N,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, \quad \forall n \geqslant N, \quad c_{n+p} = c_n.$$

⋆ **Q49. —** Soit $x \in [0,1[$. Démontrer que, si la suite $(c_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang, alors $x \in \mathbf{Q}$.

Fin du sujet MPI

La suite de cet exercice est consacrée à la démonstration de la réciproque de l'implication établie à la question 49. À cette fin, nous introduisons :

- deux a, b entiers tels que $1 \leqslant a < b$;
- $x := \dfrac{a}{b} \in [0,1[$;

et nous proposons de démontrer que la suite $(c_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang.

6.7. Développement en base β de a/b où a, b sont des entiers tels que $1 \leqslant a < b$ et $b \wedge \beta = 1$

Dans cette partie, nous supposons que $b \wedge \beta = 1$.

⋆ **Q50. —** Justifier qu'il existe $u \in \mathbf{Z}$ tel que $\beta u \equiv 1 \mod b$.

⋆⋆ **Q51. —** En remarquant que l'application :

$$r \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & [\![0,b-1]\!] \\ k & \longmapsto & \text{reste de la division euclidienne de } \beta^k \text{ par } b \end{array} \right.$$

n'est pas injective, démontrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\beta^p \equiv 1 \mod b$.

⋆ **Q52. —** Justifier que :

$$\exists (d_0,\dots,d_{p-1}) \in [\![0,\beta-1]\!]^p, \quad \exists (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathscr{A}, \quad \beta^p x = \sum_{k=0}^{p-1} d_k \beta^k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\beta^n}.$$

⋆⋆ **Q53. —** En déduire que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\beta^n}$, puis que la suite $(c_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang.

6.8. Développement en base β de a/b où a, b sont des entiers tels que $1 \leqslant a < b$

Nous revenons au cas général, en ôtant l'hypothèse de primalité relative entre b et β.

⋆⋆ **Q54. —** Justifier que :

$$\exists\,(m, a', b') \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, \quad x = \frac{a'}{\beta^m\, b'} \quad \text{et} \quad b' \wedge \beta = 1\,.$$

⋆ **Q55. —** On suppose que $b' = 1$. Démontrer que la suite $(c_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang.

⋆⋆⋆ **Q56. —** On suppose que $b' \geqslant 2$. En considérant la division euclidienne de a' par b', démontrer que la suite $(c_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang.

7. Valeurs initiales faisant diverger une suite récurrente vers $+\infty$

Prérequis.— suites numériques, inégalités.

Pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$, on considère la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_1(a) = a$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_{n+1}(a) = u_n(a)^2 + \frac{1}{n+1}\,.$$

Nous nous intéressons à l'ensemble :

$$E_\infty := \left\{ a \in \mathbf{R}_+^* \;:\; u_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \right\}.$$

7.1. Une caractérisation de l'appartenance à l'ensemble E_∞

⋆⋆ **Q57. —** Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Démontrer que $a \in E_\infty$ si et seulement s'il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_N(a) \geqslant 1$.

7.2. Convexité de l'ensemble E_∞

⋆⋆⋆ **Q58. —** Démontrer que E_∞ est un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant l'ensemble $[1, +\infty[$.

⋆ **Q59. —** Soient $a \in \mathbf{R}_+^*$. et $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que :

$$u_n(b) \xrightarrow[b\to a]{} u_n(a)\,.$$

7.3. Caractère ouvert de l'ensemble E_∞

⋆⋆⋆ **Q60. —** En déduire que :

$$\forall\, a \in E_\infty, \quad \exists\, r > 0, \quad]a - r, a + r[\subset E_\infty \qquad [\ E_\infty \text{ est une partie ouverte de } \mathbf{R}\ ]\,.$$

Fin du sujet MPI*