

Exercice 69: DA de H_n :

$$1) \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} < 0 \end{aligned}$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ cvg, donc, par comparaison, $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \right)$ converge

$$2) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, H_n - \ln(n) &= H_n - \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right) = \gamma \end{aligned}$$

$$\text{Donc } H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

$$\begin{aligned} 3) \forall n \in \mathbb{N}^*, H_n - \ln(n) - \gamma &= 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right) - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{On sait que } \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

Donc, par théorème de sommation d'équivalent cas convergent:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2k^2} \right) \sim -\frac{1}{2n}$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} \right) = -\frac{1}{2n}$$

$$\begin{aligned} H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n} &= - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \right) - \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k} - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n} \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n^3} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3} \leq 0 \end{aligned}$$

Par comparaison série - intégrale : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \sim_{+\infty} \frac{1}{12n^2}$

Où $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge donc par th de sommation des équivalents

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k} - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} \right) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}$$