

Révisions sur les espaces préhilbertiens

(1) **Définition d'un produit scalaire.** — Un produit scalaire sur un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E est une application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} E \times E & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

qui vérifie les axiomes suivants.

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall (x, y, z) \in E^3 \quad \begin{cases} \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \\ \langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle \end{cases}$$

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive :

$$\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

(d) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie :

$$\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E$$

(2) **Produits scalaires usuels.** — Il convient de savoir démontrer que chacune des applications suivantes est un produit scalaire.

$$(a) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) & \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

$$(b) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (X, Y) & \longmapsto X^\top \times Y \end{array} \right.$$

$$(c) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} [A]_i [B]_i \end{array} \right.$$

$$(d) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) \times \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_0^1 f(t) g(t) \, dt \end{array} \right.$$

$$(e) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R}) & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto \operatorname{tr}(A^\top \times B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p [A]_{i,j} [B]_{i,j} \end{array} \right.$$

(3) **Trois identités remarquables.** — Fixons un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pour la suite. On pose :

$$\forall x \in E \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad [\text{norme du vecteur } x].$$

On dispose de trois identités remarquables.

(a) Développement du carré de la norme d'une somme de deux vecteurs.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$$

(b) Développement du carré de la norme d'une somme d'un nombre fini de vecteurs.

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p \quad \left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle x_i, x_j \rangle$$

(c) *Identité de polarisation.*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$



D'après l'identité de polarisation, l'application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ détermine le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$.

(4) **Inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.** — Le premier résultat saisissant est *l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité*.

(a) Pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| .$$

(b) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si la famille de vecteurs (x, y) est liée.

La démonstration de ce résultat est à connaître. Dans le cas où $x \in E$ et $y \in E \setminus \{0_E\}$, on peut remarquer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \|x + ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 + 2 \langle x, y \rangle t + \|x\|^2 \end{array}$$

est polynomiale de degré 2 et ne prend que des valeurs positives ou nulles, pour en déduire que :

$$\Delta(f) := 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 .$$



Ce résultat est un outil précieux dans des problèmes d'optimisation (e.g. recherche d'un maximum).

(5) **Inégalité de Minkowski et son cas d'égalité.** — De l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de son cas d'égalité, on déduit *l'inégalité de Minkowski et son cas d'égalité*.

(a) Pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

(b) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0_E$ ou il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $y = \lambda x$.

(6) **Un espace préhilbertien réel est naturellement muni d'une norme.** — L'application :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \\ \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

est une norme sur E .

(a) *Homogénéité.*

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbf{R} \times E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

(b) *Séparation.*

$$\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \implies x = 0_E$$

(c) *Inégalité triangulaire (inégalité de Minkowski).*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

En conséquence, l'application norme

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{ll} (E, \| \cdot \|) & \longrightarrow (\mathbf{R}, | \cdot |) \\ x & \longmapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne, i.e. :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |||x|| - ||y||| \leq \|x - y\| \quad [\text{seconde inégalité triangulaire}] .$$

(7) **Vecteurs orthogonaux.** — Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$. Dans ce cas, on note $x \perp y$.

(8) **Famille orthogonale/orthonormale de vecteurs.** — Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

(a) La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *orthogonale* si :

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies x_i \perp x_j .$$

(b) La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *orthonormale* ou *orthonormée* si :

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} .$$

(9) **Orthogonalité et liberté.** — Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

En conséquence, si E est de dimension finie, une famille orthogonale de vecteurs non nuls comportant $\dim(E)$ vecteurs est une base de E .

(10) **Théorème de Pythagore.** — Le *théorème de Pythagore* stipule que, pour toute famille orthogonale $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 .$$

(11) **Vecteur normalisé d'un vecteur non nul.** — Le normalisé d'un vecteur non nul $x \in E$ est le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$.

(12) **Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.** — Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E . On construit une famille $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ de vecteurs de E de proche en proche comme suit.

(i) ε'_1 est le vecteur normalisé de $\varepsilon_1 := e_1$.

(ii) Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\varepsilon'_{i+1} \text{ est le vecteur normalisé de } \varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \varepsilon'_k .$$

Alors :

(a) la famille $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ est bien définie et orthonormale ;

(b) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_i)$.

La démonstration des propriétés (a) et (b) est à connaître (récurrence forte). De plus, on doit savoir appliquer cet algorithme, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, dans un espace préhilbertien réel « concret ».

- (13) Matrice de passage d'une base à son orthonormalisée par l'algorithme de Gram-Schmidt.** — Supposons que l'espace E est de dimension finie. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , on obtient une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ de E et la matrice de passage :

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} := \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E)$$

est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

- (14) Espaces euclidiens et bases orthonormées.** — Supposons que le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E , muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est de dimension finie $n \geq 1$. On dit alors que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un *espace euclidien*.

L'espace E possède une base orthonormée (conséquence de l'algorithme de Gram-Schmidt déjà expliquée).

- (15) Théorème de la base orthonormée incomplète.** — Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée (donc libre) de vecteurs de E ($p < n$), alors on peut la compléter en une famille orthonormée $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de vecteurs de E , qui est une base orthonormée de E .

- (16) Coordonnées dans une base orthonormée, produit scalaire et norme.** — Les trois propriétés suivantes mettent en lumière qu'il est aisé de travailler dans un espace euclidien muni d'une base orthonormée.

Munissons E d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et considérons deux vecteurs x, y de E .

- (a) Coordonnées dans une BON.**

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

- (b) Produit scalaire et norme dans une BON.** Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\langle x, y \rangle = X^\top \times Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{X^\top \times X} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$



Dans un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée, on calcule de la même manière que dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

- (17) Sous-espaces vectoriels orthogonaux.** — On ne suppose plus le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *orthogonaux* si :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

- (18) Des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux sont en somme directe.** — Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux, alors la somme $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ est directe.

- (19) Orthogonal d'une partie.** — Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est la partie $A^\perp$ de E définie par :

$$A^\perp := \{x \in E : \forall a \in A \quad \langle a, x \rangle = 0\}.$$

L'orthogonal de A est un sous-espace vectoriel de E .

- (20) Calcul de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel engendré.** — Si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs de E :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)^\perp = \{y \in E : \langle y, x_1 \rangle = \dots = \langle y, x_p \rangle = 0\} \quad .$$

Pour déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, on est ainsi ramené à résoudre le système linéaire homogène :

$$\begin{cases} \langle y, x_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle y, x_n \rangle = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $y \in E$.

(21) Somme d'un sous-espace et de son orthogonal, orthogonal de son orthogonal. — Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

(a) la somme $F \oplus F^\perp$ est directe ;

(b) $F \subset (F^\perp)^\perp$.



Si le sous-espace vectoriel F est quelconque, il peut arriver que $F \oplus F^\perp \neq E$ et $F \neq (F^\perp)^\perp$.

(22) Projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. — Le résultat suivant est fondamental et « sa » démonstration est à connaître.

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$.

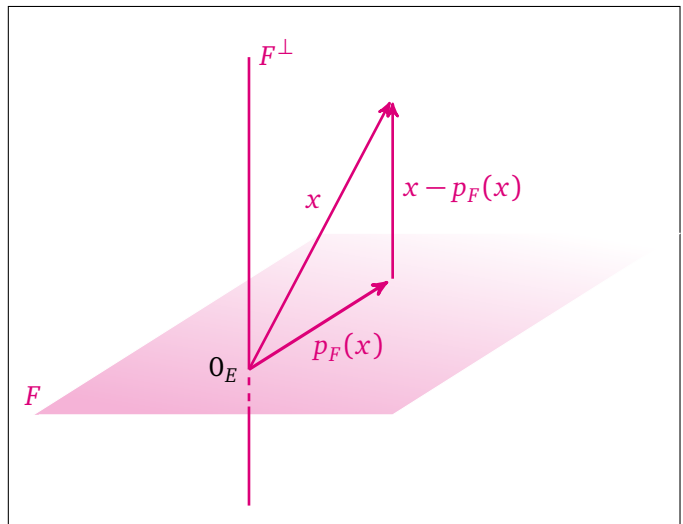
(a) Il existe un unique vecteur y de E tel que :

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp \quad .$$

Ce vecteur y est noté $p_F(x)$ et est appelé projeté orthogonal de x sur F .

(b) Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base orthonormale de F :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, f_i \rangle f_i \quad .$$



Pour calculer $p_F(x)$, on dispose de deux grandes méthodes :

- déterminer une base orthonormée de F (e.g. en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à une base de F), puis appliquer la formule (b) ;
- déterminer un vecteur y tel que :

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp \quad .$$

(23) Définition d'un projecteur orthogonal. — Un projecteur p de E est dit *orthogonal* si $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$.

(24) Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. — Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

(a) *Projection orthogonale de E sur F .* L'application :

$$p_F \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} E \\ p_F(x) \text{ qui est l'unique vecteur } y \in F \text{ tel que } x - y \in F^\perp \end{array}$$

est un projecteur orthogonal, appelé projection orthogonale de E sur F .

(b) Noyau et image de la projection orthogonale de E sur F .

$$\text{Ker}(p_F) = F^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_F - \text{id}_E) = F$$

(c) Expression de la projection orthogonale de E sur F à l'aide d'une base orthonormale de F . Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base orthonormale de F , alors :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, f_i \rangle f_i .$$

(25) **Rappel sur la distance d'un vecteur à une partie non vide.** — Soit $x \in E$ et A une partie non vide de E . La distance de x à A est définie par :

$$d(x, A) := \inf \{ \|x - a\| : a \in A \} .$$

Nous savons démontrer que l'application :

$$d(\cdot, A) \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \longmapsto d(x, A) := \inf \{ \|x - a\| : a \in A \} \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne (avec des passages à la borne inférieure soignés), donc continue. En outre, nous savons établir que :

$$\forall x \in E \quad d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A} \quad [\bar{A} \text{ désigne l'adhérence de } A] .$$

(26) **Somme d'un s.e.v. de dimension finie et de son orthogonal, orthogonal de son orthogonal.** — Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors :

(a) $F \oplus F^\perp = E$

(b) $F = (F^\perp)^\perp$.

Pour établir ces deux résultats, on peut prendre appui sur la projection orthogonale de E sur le sous-espace vectoriel F de dimension finie.

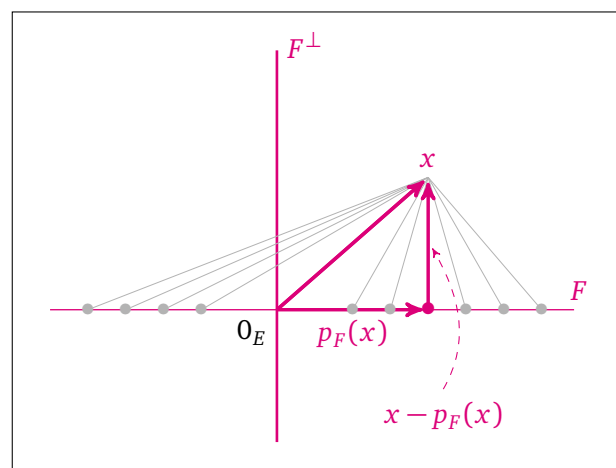
(27) **Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.** — Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. On note $p_F : E \longrightarrow E$ la projection orthogonale de E sur F .

(a) $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

(b) Pour tout $y \in F$:

$$y \neq p_F(x) \implies \|x - y\| > d(x, F) .$$

(c) $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$



La distance de x à F est donc atteinte en un unique point de F , qui est le projeté orthogonal $p_F(x)$ du vecteur x sur F .



Ce résultat est un outil précieux dans des problèmes d'optimisation (e.g. recherche d'un minimum).

(28) Projection sur un hyperplan d'un espace euclidien, distance d'un vecteur à cet hyperplan. — Supposons E de dimension finie (E est donc euclidien). Considérons un hyperplan H de E et u un vecteur non nul normal à H (i.e. un vecteur de base de la droite vectorielle $H^\perp$). Alors, pour tout vecteur x de E :

(a) le projeté orthogonal de x sur H est :

$$p_H(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

(b) la distance de x à H est :

$$d(x, H) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|} .$$