Synthèse du cours de probabilités de MP2I

(1) Probabilité sur un ensemble fini. — Soit Ω un ensemble fini non vide. Une probabilité sur Ω est une application

$$\mathbf{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$$

telle que

(a) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

(b) $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing \Longrightarrow \mathbf{P}(A_1 \sqcup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)$

(2) Propriétés immédiates d'une probabilité. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour toute famille $(A_, \ldots, A_n)$ d'événements deux-à-deux incompatibles :

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

(a) Pour tout événement A :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$$

(3) Distribution de probabilités sur un ensemble fini. — Soit Ω un ensemble fini non vide. Une distribution de probabilités sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega} \in (\mathbf{R}_+)^\Omega$ telle que :

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

(4) Probabilité versus distribution de probabilités. — Soit Ω un ensemble fini non vide.

(a) Si $\mathbf{P}$ est une probabilité sur Ω alors :

$$(p_\omega := \mathbf{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$$

est une distribution de probabilité sur Ω.

(b) Soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilité sur Ω. Alors l'application :

$$\mathbf{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega \in A} p_\omega \end{array} \right.$$

est l'unique probabilité sur Ω telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

(5) Propriétés d'une probabilité. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ [probabilité d'un réunion]

(b) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ [probabilité d'une différence]

(c) $\forall A \in P(\Omega) \quad \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ [probabilité de l'événement contraire]

(d) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ [croissance de la probabilité]

(6) Propriétés conditionnelles. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, B un événement tel que $P(B) > 0$ et A un événement. La probabilité conditionnelle de A sachant B notée $\mathbf{P}(A \mid B)$ ou $\mathbf{P}_B(A)$ est définie par :

$$\mathbf{P}(A \mid B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

(7) Une probabilité conditionnelle est une probabilité. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et B un événement tel que $P(B) > 0$. Alors l'application :

$$\mathbf{P}_B \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}(A \mid B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace Ω.

(8) Formule des probabilités composées. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) Soient A, B des événements. Alors
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B \mid A)$$

(b) Soient $n \geqslant 2$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Alors
$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbf{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \ \ldots\ \times \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

(9) Système complet d'événements. — Soit Ω un ensemble fini. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est un système complet d'événements si :

(a) les A_i sont deux-à-deux incompatibles, i.e. pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;

(b) la réunion de tous les A_i égale Ω, i.e. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

(10) Formule des probabilités totales. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Pour tout événement B :
$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B \mid A_i) \times \mathbf{P}(A_i)$$

(11) Formule de Bayes. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) Si A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(A) > 0$ et $\mathbf{P}(B) > 0$, alors :
$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(B \mid A) \times \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

(b) Soient $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements et B un événement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$. Alors :
$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \qquad \mathbf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B \mid A_i) \times \mathbf{P}(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B \mid A_j) \times \mathbf{P}(A_j)}$$

(12) Loi d'une variable aléatoire. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E un ensemble et $X \colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire.

(a) L'application
$$\mathbf{P}_X \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}(X \in A) \end{array} \right.$$
est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée loi de X.

(b) La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

(13) Méthode pour déterminer la loi d'une variable aléatoire. — Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X, on procède en deux temps.

(a) On détermine d'abord l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs.

(b) Ensuite, on calcule sa loi en déterminant, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x)$.

(14) Égalité en loi de deux variables aléatoires. — Soient $(\Omega_1, \mathbf{P}_1), (\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ deux espaces probabilisés finis, et $X_1 \colon \Omega_1 \longrightarrow E_1$, $X_2 \colon \Omega_2 \longrightarrow E_2$ deux variables aléatoires. On dit que X_1 et X_2 sont égales en loi et on note $X_1 \sim X_2$, si

(a) $X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2)$

(b) les probabilités $(\mathbf{P}_1)_{X_1}$ et $(\mathbf{P}_2)_{X_2}$ sur $X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2)$ sont égales.

Deux variables aléatoires peuvent être égales en loi sans être égales.

(15) Image d'une variable aléatoire. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F des ensembles, $X \colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f \colon X(\Omega) \longrightarrow F$ une application. La loi de la variable aléatoire $f \circ X$, notée $f(X)$, est entièrement déterminée par la loi de X, précisément
$$\forall A \in \mathcal{P}(f(X(\Omega))), \quad \mathbf{P}_{f(X)}(A) = \mathbf{P}_X\left(f^{-1}(A)\right).$$

(16) Égalité en loi des images de deux variables aléatoires égales en loi. — Soient $(\Omega_1, \mathbf{P}_1), (\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ deux espaces probabilisés finis, $X_1 \colon \Omega_1 \longrightarrow E_1$, $X_2 \colon \Omega_2 \longrightarrow E_2$ deux variables aléatoires telles que $X_1 \sim X_2$ et $f \colon X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2) \longrightarrow F$ une application. Alors :

$$f(X_1) \sim f(X_2)$$

(17) Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, B un événement tel que $P(B) > 0$, E un ensemble et $X \colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. La loi conditionnelle de X sachant B est

$$\mathbf{P}_{X/B} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}_B(X \in A) \end{array} \right.$$

qui est une probabilité sur Ω, entièrement déterminée par la distribution de probabilité $(\mathbf{P}_B(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ sur $X(\Omega)$.

(18) Indépendance de deux événements. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Deux événements A, B sont dits indépendants si :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$$

(19) Indépendance de deux événements et événements contraires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et A, B deux événements.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants}$$

(20) Famille d'événements mutuellement indépendants. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements. On dit que les événements A_i $(i \in I)$ sont mutuellement indépendants si :

$$\forall J \in \mathcal{P}(I) \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

L'indépendance deux-à-deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

(21) Loi conjointe et lois marginales. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X \colon \Omega \longrightarrow E$, $Y \colon \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires.

(a) La loi de la variable aléatoire :

$$Z := (X, Y) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est appelée loi conjointe de X et Y.

(b) Les lois de X et Y sont appelées lois marginales de Z.

(22) Méthode pour déterminer la loi d'un couple. — Pour déterminer la loi d'un couple $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires, on calcule, pour tout $(x, y) \in Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) := \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

(23) La loi conjointe détermine les lois marginales. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X \colon \Omega \longrightarrow E$, $Y \colon \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires. Posons $Z = (X, Y)$.

$$\forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Z = (x, y)) \qquad \text{et} \qquad \forall y \in Y(\Omega) \quad P(Y = j) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(Z = (i, j))$$

La loi de Z détermine donc entièrement les lois de X et Y.

Les lois marginales ne déterminent pas nécessairement la loi conjointe.

(24) Indépendance de deux variables aléatoires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X \colon \Omega \longrightarrow E$, $Y \colon \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes $(X \perp\!\!\!\perp Y)$ si :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega)) \quad \mathbf{P}(X \in A\,,\, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbf{P}(X = x\,,\, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$$

(25) Indépendance et image de deux variables aléatoires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F, E', F' des ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$, $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires et $f : X(\Omega) \longrightarrow E'$, $g : Y(\Omega) \longrightarrow F'$ des applications. Alors :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

(26) Indépendance d'une famille de variables aléatoires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles et

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1 \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow E_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes si :

$$\forall\, (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \ldots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega)) \quad ((X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n)) \text{ est une famille d'événements indépendants}$$

ce qui équivaut à :

$$\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \quad \mathbf{P}\,(X_1 = x_1\,,\, \ldots\,,\, X_n = x_n) = \mathbf{P}\,(X_1 = x_1) \times \ldots \times \mathbf{P}\,(X_n = x_n)$$

(27) Lemme des coalitions. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $m \in [\![1, n-1]\!]$, $E_1, \ldots, E_n, E', F'$ des ensembles,

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1 \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow E_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires indépendantes et

$$f : X_1(\Omega) \times \ldots \times X_m(\Omega) \longrightarrow E' \quad \text{et} \quad g : X_{m+1}(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \longrightarrow F'$$

deux applications. Alors les deux variables aléatoires :

$$f(X_1, \ldots, X_m) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E' \\ \omega & \longmapsto & f(X_1(\omega), \ldots, X_m(\omega)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g(X_{m+1}, \ldots, X_n) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F' \\ \omega & \longmapsto & g(X_{m+1}(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array} \right.$$

sont indépendantes.

(28) Espérance d'une variable aléatoire. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une variable aléatoire. L'espérance de X est le nombre complexe $\mathbf{E}\,(X)$ défini par

$$\mathbf{E}\,(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbf{P}\,(X = x) \qquad \text{[moyenne des valeurs de } X \text{ pondérées par leurs probabilités]}$$

(29) Variable aléatoire centrée. — Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance vaut 0.

(30) Formule de transfert. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{C}$ une application.

$$\mathbf{E}\,(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbf{P}\,(X = x)$$

(31) Propriétés de l'espérance. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ sont des variables aléatoires et λ, μ sont des complexes, alors :

$$\mathbf{E}\,(\lambda X + \mu Y) = \lambda\, \mathbf{E}\,(X) + \mu\, \mathbf{E}\,(Y) \qquad \text{[linéarité de l'espérance]}$$

(b) Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est une variable aléatoire, alors :

$$X \geqslant 0 \implies \mathbf{E}\,(X) \geqslant 0 \qquad \text{[positivité de l'espérance]}$$

(c) Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ sont des variables aléatoires, alors :

$$X \leqslant Y \implies \mathbf{E}\,(X) \leqslant \mathbf{E}\,(Y) \qquad \text{[croissance de l'espérance]}$$

(d) Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est une variable aléatoire, alors

$$|\mathbf{E}\,(X)| \leqslant \mathbf{E}\,(|X|) \qquad \text{[inégalité triangulaire]}$$

(32) Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$,

$$X_1 \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad X_2 \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad \ldots \quad , \quad X_n \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$$

des variables aléatoires. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, alors :

$$\mathbf{E}\left(X_1 X_2 \ldots X_n\right) = \mathbf{E}\left(X_1\right)\, \mathbf{E}\left(X_2\right)\, \ldots\, \mathbf{E}\left(X_n\right)$$

(33) Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire.

(a) La variable de X, notée $V(X)$, est définie par

$$\mathbf{V}\left(X\right) := \mathbf{E}\left(\left(X - \mathbf{E}\left(X\right)\right)^2\right) \geqslant 0 \qquad \text{[mesure la dispersion des valeurs de } X \text{ par rapport à la moyenne } \mathbf{E}\left(X\right)\text{]}$$

(b) L'écart type de X, noté $\sigma(X)$, est défini par

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}\left(X\right)}$$

(34) Variable aléatoire réduite. — Une variable aléatoire est dite réduite si sa variance vaut 1.

(35) Effet d'une transformation affine sur la variance. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{V}\left(aX + b\right) = a^2\, \mathbf{V}\left(X\right)$$

(36) Centrage et réduction d'une variable aléatoire. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire telle que $\sigma(X) > 0$. Alors la variable :

$$\frac{X - \mathbf{E}\left(X\right)}{\sigma(X)}$$

est centrée et réduite.

(37) Formule de Koenig-Huygens pour la variance. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors :

$$\mathbf{V}\left(X\right) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}\left(X\right)^2$$

(38) Covariance de deux variables aléatoires réelles. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. La covariance de X et Y, notée $\mathbf{Cov}\left(X\,,\,Y\right)$, est définie par :

$$\mathbf{Cov}\left(X\,,\,Y\right) := \mathbf{E}\left(\left(X - \mathbf{E}\left(X\right)\right)\left(Y - \mathbf{E}\left(Y\right)\right)\right)$$

de sorte que $\mathbf{Cov}\left(X\,,\,X\right) = \mathbf{V}\left(X\right)$.

(39) Propriétés de la covariance. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. La covariance

$$\mathbf{Cov} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\Omega \times \mathbf{R}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \mathbf{Cov}\left(X\,,\,Y\right) = \mathbf{E}\left(\left(X - \mathbf{E}\left(X\right)\right)\left(Y - \mathbf{E}\left(Y\right)\right)\right) \end{array} \right.$$

est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur l'ensemble $\mathbf{R}^\Omega$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω, i.e. :

(a) $\forall\,(X_1, X_2, Y) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^3 \quad \forall\,(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{Cov}\left(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2\,,\,Y\right) = \lambda_1\,\mathbf{Cov}\left(X_1\,,\,Y\right) + \lambda_2\,\mathbf{Cov}\left(X_2\,,\,Y\right)$

(b) $\forall\,(X, Y_1, Y_2) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^3 \quad \forall\,(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{Cov}\left(X\,,\,\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2\right) = \lambda_1\,\mathbf{Cov}\left(X\,,\,Y_1\right) + \lambda_2\,\mathbf{Cov}\left(X\,,\,Y_2\right)$

(c) $\forall\,(X, Y) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^2 \quad \mathbf{Cov}\left(X\,,\,Y\right) = \mathbf{Cov}\left(Y\,,\,X\right)$

(d) $\forall\,X \in \mathbf{R}^\Omega \quad \mathbf{Cov}\left(X\,,\,X\right) \geqslant 0$

(40) Variables aléatoires décorrélées. — Deux variables aléatoires sont dites décorrélées si leur covariance vaut 0.

(41) Formule de Koenig-Huygens pour la covariance. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$\mathbf{Cov}\left(X\,,\,Y\right) = \mathbf{E}\left(XY\right) - \mathbf{E}\left(X\right)\,\mathbf{E}\left(Y\right)$$

(42) L'indépendance entraîne la décorrélation. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ sont décorrélées}$$

La décorrélation n'entraîne pas nécessairement l'indépendance.

(43) Variance d'une somme de variables aléatoires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n \geqslant 2$ et $(X_i\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R})_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de variables aléatoires.

(a) $\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\,\mathbf{Cov}(X_1\,,\,X_2)$

(b) Si X_1 et X_2 sont décorrélées alors $\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2)$.

(c) $\mathbf{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbf{Cov}(X_i\,,\,Y_j)$

(d) Si $X_1, \ldots, X_n$ sont deux-à-deux décorrélées alors $\mathbf{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i)$.

(44) Inégalité de Markov. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire telle que $X \geqslant 0$ et $a > 0$. Alors :

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

(45) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire et $\varepsilon > 0$. Alors

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

(46) Loi uniforme sur un ensemble fini non vide. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E un ensemble et $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ et on note $X \sim \mathcal{U}(X(\Omega))$, si toutes les probabilités $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, sont égales ou, ce qui revient au même, si :

$$\forall\, x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \frac{1}{\operatorname{card}(X(\Omega))}$$

(47) Loi de Bernoulli. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in]0, 1[$, E un ensemble, $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X = 1) = p$$

Alors :

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \qquad , \qquad \mathbf{E}(X) = p \qquad , \qquad \mathbf{V}(X) = p(1 - p)$$

(48) Loi d'une indicatrice. — Soit A un événement d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors $\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbf{P}(A))$.

(49) Loi binomiale. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times]0, 1[$, E un ensemble, $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Alors :

$$\mathbf{E}(X) = n\,p \qquad , \qquad \mathbf{V}(X) = n\,p\,(1 - p)$$

(50) Situation de reconnaissance de loi binomiale. — Si l'on répète n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 et 1) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (i.e. de 1) obtenus, alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où p est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli..

(51) Somme de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, mutuellement indépendantes, suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$. Alors :

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$