

Révisions de probabilités

(1) **Probabilité sur un ensemble fini.** — Soit Ω un ensemble fini non vide. Une probabilité sur Ω est une application

$$\mathbf{P} \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \\ A \longmapsto P(A) \end{array} \right.$$

telle que

- (a) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- (b) $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset \implies \mathbf{P}(A_1 \sqcup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)$

(2) **Propriétés immédiates d'une probabilité.** — Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini.

- (a) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
- (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour toute famille (A, \dots, A_n) d'événements deux-à-deux incompatibles :

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$$

- (a) Pour tout événement A :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$$

(3) **Distribution de probabilités sur un ensemble fini.** — Soit Ω un ensemble fini non vide. Une distribution de probabilités sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega} \in (\mathbf{R}_+)^{\Omega}$ telle que :

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

(4) **Probabilité versus distribution de probabilités.** — Soit Ω un ensemble fini non vide.

- (a) Si \mathbf{P} est une probabilité sur Ω alors :

$$(p_\omega := \mathbf{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$$

est une distribution de probabilité sur Ω .

- (b) Soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilité sur Ω . Alors l'application :

$$\mathbf{P} \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \\ A \longmapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega \end{array} \right.$$

est l'unique probabilité sur Ω telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

(5) **Propriétés d'une probabilité.** — Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini.

- (a) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ [probabilité d'une réunion]
- (b) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad A \subset B \implies \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ [probabilité d'une différence]
- (c) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ [probabilité de l'événement contraire]
- (d) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ [croissance de la probabilité]

(6) **Propriétés conditionnelles.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, B un événement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$ et A un événement. La probabilité conditionnelle de A sachant B notée $\mathbf{P}(A|B)$ ou $\mathbf{P}_B(A)$ est définie par :

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

(7) **Une probabilité conditionnelle est une probabilité.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et B un événement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$. Alors l'application :

$$\mathbf{P}_B \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \\ A \longmapsto \mathbf{P}(A|B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace Ω .

(8) Formule des probabilités composées. — Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini.

(a) Soient A, B des événements. Alors

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B | A)$$

(b) Soient $n \geq 2$ et A_1, \dots, A_n des événements. Alors

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2 | A_1) \times \mathbf{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbf{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

(9) Système complet d'événements. — Soit Ω un ensemble fini. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est un système complet d'événements si :

(a) les A_i sont deux-à-deux incompatibles, i.e. pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;

(b) la réunion de tous les A_i égale Ω , i.e. $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

(10) Formule des probabilités totales. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et (A_1, A_2, \dots, A_n) un système complet d'événements. Pour tout événement B :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(B | A_i) \times \mathbf{P}(A_i)$$

(11) Formule de Bayes. — Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini.

(a) Si A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(A) > 0$ et $\mathbf{P}(B) > 0$, alors :

$$\mathbf{P}(A | B) = \mathbf{P}(B | A) \times \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

(b) Soient (A_1, A_2, \dots, A_n) un système complet d'événements et B un événement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$. Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbf{P}(A_i | B) = \frac{\mathbf{P}(B | A_i) \times \mathbf{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(B | A_j) \times \mathbf{P}(A_j)}$$

(12) Loi d'une variable aléatoire. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, E un ensemble et $X: \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire.

(a) L'application

$$\mathbf{P}_X \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0, 1] \\ A \longmapsto \mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée loi de X .

(b) La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

(13) Méthode pour déterminer la loi d'une variable aléatoire. — Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X , on procède en deux temps.

(a) On détermine d'abord l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs.

(b) Ensuite, on calcule sa loi en déterminant, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x)$.

(14) Égalité en loi de deux variables aléatoires. — Soient $(\Omega_1, \mathbf{P}_1), (\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ deux espaces probabilisés finis, et $X_1: \Omega_1 \rightarrow E_1, X_2: \Omega_2 \rightarrow E_2$ deux variables aléatoires. On dit que X_1 et X_2 sont égales en loi et on note $X_1 \sim X_2$, si

(a) $X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2)$

(b) les probabilités $(\mathbf{P}_1)_{X_1}$ et $(\mathbf{P}_2)_{X_2}$ sur $X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2)$ sont égales.



Deux variables aléatoires peuvent être égales en loi sans être égales.

(15) Image d'une variable aléatoire. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, E, F des ensembles, $X: \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire et $f: X(\Omega) \rightarrow F$ une application. La loi de la variable aléatoire $f \circ X$, notée $f(X)$, est entièrement déterminée par la loi de X , précisément

$$\forall A \in \mathcal{P}(f(X(\Omega))), \quad \mathbf{P}_{f(X)}(A) = \mathbf{P}_X(f^{-1}(A)).$$

- (16) **Égalité en loi des images de deux variables aléatoires égales en loi.** — Soient $(\Omega_1, \mathbf{P}_1), (\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ deux espaces probabilisés finis, $X_1: \Omega_1 \rightarrow E_1, X_2: \Omega_2 \rightarrow E_2$ deux variables aléatoires telles que $X_1 \sim X_2$ et $f: X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2) \rightarrow F$ une application. Alors :

$$f(X_1) \sim f(X_2)$$

- (17) **Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, B un événement tel que $P(B) > 0$, E un ensemble et $X: \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire. La loi conditionnelle de X sachant B est

$$\mathbf{P}_{X/B} \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1] \\ A \mapsto \mathbf{P}_B(X \in A) \end{array} \right.$$

qui est une probabilité sur Ω , entièrement déterminée par la distribution de probabilité $(\mathbf{P}_B(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ sur $X(\Omega)$.

- (18) **Indépendance de deux événements.** — Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini. Deux événements A, B sont dits indépendants si :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$$

- (19) **Indépendance de deux événements et événements contraires.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et A, B deux événements.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \implies A \text{ et } \bar{B} \text{ sont indépendants}$$

- (20) **Famille d'événements mutuellement indépendants.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements. On dit que les événements A_i ($i \in I$) sont mutuellement indépendants si :

$$\forall J \in \mathcal{P}(I) \quad \mathbf{P} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$



L'indépendance deux-à-deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

- (21) **Loi conjointe et lois marginales.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X: \Omega \rightarrow E, Y: \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires.

(a) La loi de la variable aléatoire :

$$Z := (X, Y) \left| \begin{array}{l} \Omega \rightarrow E \times F \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est appelée loi conjointe de X et Y .

(b) Les lois de X et Y sont appelées lois marginales de Z .

- (22) **Méthode pour déterminer la loi d'un couple.** — Pour déterminer la loi d'un couple $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires, on calcule, pour tout $(x, y) \in Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) := \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

- (23) **La loi conjointe détermine les lois marginales.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X: \Omega \rightarrow E, Y: \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires. Posons $Z = (X, Y)$.

$$\forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Z = (x, y)) \quad \text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega) \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(Z = (x, y))$$

La loi de Z détermine donc entièrement les lois de X et Y .



Les lois marginales ne déterminent pas nécessairement la loi conjointe.

- (24) **Indépendance de deux variables aléatoires.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X: \Omega \rightarrow E, Y: \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes ($X \perp\!\!\!\perp Y$) si :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega)) \quad \mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$$

(25) Indépendance et image de deux variables aléatoires. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, E, F, E', F' des ensembles, $X: \Omega \rightarrow E, Y: \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires et $f: X(\Omega) \rightarrow E', g: Y(\Omega) \rightarrow F'$ des applications. Alors :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

(26) Indépendance d'une famille de variables aléatoires. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$, E_1, \dots, E_n des ensembles et

$$X_1: \Omega \rightarrow E_1, \quad X_2: \Omega \rightarrow E_2, \quad \dots, \quad X_n: \Omega \rightarrow E_n$$

des variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes si :

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega)) \quad ((X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)) \text{ est une famille d'événements indépendants}$$

ce qui équivaut à :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \quad \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \dots \times \mathbf{P}(X_n = x_n)$$

(27) Lemme des coalitions. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$, $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, E_1, \dots, E_n, E', F' des ensembles,

$$X_1: \Omega \rightarrow E_1, \quad X_2: \Omega \rightarrow E_2, \quad \dots, \quad X_n: \Omega \rightarrow E_n$$

des variables aléatoires indépendantes et

$$f: X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega) \rightarrow E' \quad \text{et} \quad g: X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow F'$$

deux applications. Alors les deux variables aléatoires :

$$f(X_1, \dots, X_m) \left| \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \\ \omega \mapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} E' \\ f(X_1(\omega), \dots, X_m(\omega)) \end{array} \quad \text{et} \quad g(X_{m+1}, \dots, X_n) \left| \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \\ \omega \mapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} F' \\ g(X_{m+1}(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array}$$

sont indépendantes.

(28) Espérance d'une variable aléatoire. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $X: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ une variable aléatoire. L'espérance de X est le nombre complexe $\mathbf{E}(X)$ défini par

$$\mathbf{E}(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbf{P}(X = x) \quad [\text{moyenne des valeurs de } X \text{ pondérées par leurs probabilités}]$$

(29) Variable aléatoire centrée. — Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance vaut 0.

(30) Formule de transfert. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, E un ensemble, $X: \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire et $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbf{C}$ une application.

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbf{P}(X = x)$$

(31) Propriétés de l'espérance. — Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini.

(a) Si $X: \Omega \rightarrow \mathbf{C}, Y: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ sont des variables aléatoires et λ, μ sont des complexes, alors :

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y) \quad [\text{linéarité de l'espérance}]$$

(b) Si $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ est une variable aléatoire, alors :

$$X \geq 0 \implies \mathbf{E}(X) \geq 0 \quad [\text{positivité de l'espérance}]$$

(c) Si $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}, Y: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ sont des variables aléatoires, alors :

$$X \leq Y \implies \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y) \quad [\text{croissance de l'espérance}]$$

(d) Si $X: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est une variable aléatoire, alors

$$|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|) \quad [\text{inégalité triangulaire}]$$

(32) Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$,

$$X_1: \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad X_2: \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad \dots \quad , \quad X_n: \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$$

des variables aléatoires. Si (X_1, X_2, \dots, X_n) est une famille de variables aléatoires indépendantes, alors :

$$\mathbf{E}(X_1 X_2 \dots X_n) = \mathbf{E}(X_1) \mathbf{E}(X_2) \dots \mathbf{E}(X_n)$$

(33) Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire.

(a) La variable de X , notée $V(X)$, est définie par

$$\mathbf{V}(X) := \mathbf{E} \left((X - \mathbf{E}(X))^2 \right) \geq 0 \quad \left[\text{mesure la dispersion des valeurs de } X \text{ par rapport à la moyenne } \mathbf{E}(X) \right]$$

(b) L'écart type de X , noté $\sigma(X)$, est défini par

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

(34) Variable aléatoire réduite. — Une variable aléatoire est dite réduite si sa variance vaut 1.

(35) Effet d'une transformation affine sur la variance. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$$

(36) Centrage et réduction d'une variable aléatoire. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire telle que $\sigma(X) > 0$. Alors la variable :

$$\frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée et réduite.

(37) Formule de Koenig-Huygens pour la variance. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$$

(38) Covariance de deux variables aléatoires réelles. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. La covariance de X et Y , notée $\mathbf{Cov}(X, Y)$, est définie par :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) := \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$$

de sorte que $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$.

(39) Propriétés de la covariance. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini. La covariance

$$\mathbf{Cov} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^\Omega \times \mathbf{R}^\Omega \longrightarrow \\ (X, Y) \longmapsto \end{array} \right. \mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$$

est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur l'ensemble \mathbf{R}^Ω des variables aléatoires réelles définies sur Ω , i.e. :

- (a) $\forall (X_1, X_2, Y) \in (\mathbf{R}^\Omega)^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \mathbf{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \mathbf{Cov}(X_2, Y)$
- (b) $\forall (X, Y_1, Y_2) \in (\mathbf{R}^\Omega)^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \mathbf{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \mathbf{Cov}(X, Y_2)$
- (c) $\forall (X, Y) \in (\mathbf{R}^\Omega)^2 \quad \mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
- (d) $\forall X \in \mathbf{R}^\Omega \quad \mathbf{Cov}(X, X) \geq 0$

(40) Variables aléatoires décorréélées. — Deux variables aléatoires sont dites décorréélées si leur covariance vaut 0.

(41) Formule de Koenig-Huygens pour la covariance. — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)$$

(42) **L'indépendance entraîne la décorrélation.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini et $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies X \text{ et } Y \text{ sont décorrélées}$$



La décorrélation n'entraîne pas nécessairement l'indépendance.

(43) **Variance d'une somme de variables aléatoires.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, $n \geq 2$ et $(X_i: \Omega \longrightarrow \mathbf{R})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de variables aléatoires.

(a) $\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2 \mathbf{Cov}(X_1, X_2)$

(b) Si X_1 et X_2 sont décorrélées alors $\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2)$.

(c) $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$

(d) Si X_1, \dots, X_n sont deux-à-deux décorrélées alors $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)$.

(44) **Inégalité de Markov.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire telle que $X \geq 0$ et $a > 0$. Alors :

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

(45) **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, $X: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire et $\varepsilon > 0$. Alors

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

(46) **Loi uniforme sur un ensemble fini non vide.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, E un ensemble et $X: \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ et on note $X \sim \mathcal{U}(X(\Omega))$, si toutes les probabilités $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, sont égales ou, ce qui revient au même, si :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \frac{1}{\text{card}(X(\Omega))}$$

(47) **Loi de Bernoulli.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, $p \in]0, 1[$, E un ensemble, $X: \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = p$$

Alors :

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \quad , \quad \mathbf{E}(X) = p \quad , \quad \mathbf{V}(X) = p(1 - p)$$

(48) **Loi d'une indicatrice.** — Soit A un événement d'un espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) . Alors $\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbf{P}(A))$.

(49) **Loi binomiale.** — Soient (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini, $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times]0, 1[$, E un ensemble, $X: \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Alors :

$$\mathbf{E}(X) = np \quad , \quad \mathbf{V}(X) = np(1 - p)$$

(50) **Situation de reconnaissance de loi binomiale.** — Si l'on répète n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 et 1) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (i.e. de 1) obtenus, alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où p est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli..

(51) **Somme de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes.** — Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, mutuellement indépendantes, suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$. Alors :

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$