Révisions sur l'analyse asymptotique

Consigne. — On s'attachera à bien comprendre chacune des identités numérotées de (1) à (25). Cas échéant, on sollicitera des explications complémentaires [courriel].

1. Notations de Landau

Notation. — Dans cette partie, a désigne un point de $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g, h sont des fonctions définies sur un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1.1. Relation de domination O

Définition 1. — *On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ s'il existe une fonction β définie sur un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ à valeurs réelles telle que*

- *$f(x) = \beta(x) g(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$;*
- *la fonction β est bornée sur un voisinage épointé de de a dans $\overline{\mathbf{R}}$.*

Si la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{la fonction } x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée sur un voisinage épointé de de } a \text{ dans } \overline{\mathbf{R}}$$

Remarque 2. — On écrit $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + \mathrm{O}\left(h(x)\right)$ pour signifier $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(h(x)\right)$.

Exemple 3. — Comme la fonction sin est bornée sur $\mathbf{R}$

$$\frac{\sin(x)}{x^2} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \tag{1}$$

1.2. Relation de négligeabilité o

Définition 4. — *On dit que f est négligeable par rapport à g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ à valeurs réelles telle que*

- *$f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$;*
- *$\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$*

Si la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Remarque 5. — On écrit $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + \mathrm{o}\left(h(x)\right)$ pour signifier $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(h(x)\right)$.

Une fonction possédant une limite finie en a étant bornée localement en a, il vient

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$$

Exemple 6. — Les croissances comparées de ln et les fonctions puissances livrent

$$\ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right) \qquad \text{et} \qquad \ln(x) \underset{x \to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \tag{2}$$

Exemple 7. — Si f une fonction définie sur un voisinage de $a \in \mathbf{R}$ et dérivable en a, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)\,(x-a) + \mathrm{o}\left(x - a\right) \tag{3}$$

En particulier

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x\right) \qquad \ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x\right) \qquad \exp(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}\left(x\right) \qquad \sqrt{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}\left(x\right) \tag{4}$$

D'après (3)

$$\sin(x) - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+x} - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x) \tag{5}$$

Exemple 8. — La fonction $f\colon x \longmapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]-1,1[$. De plus pour tout $x \in\,]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Comme, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

$$|f'''(x)| \leqslant 16$$

l'inégalité de Taylor-Lagrange nous livre, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leqslant 16\,\frac{|x|^3}{6} = \frac{8}{3}\,|x|^3$$

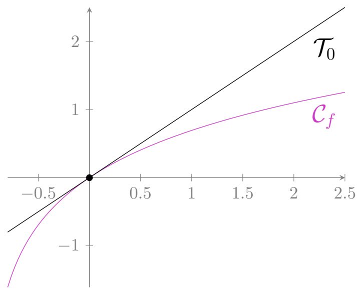
Nous en déduisons que

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}\left(x^3\right) \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) \qquad \ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \tag{6}$$

Nous en déduisons deux conséquences géométriques.

(a) D'après (6), la tangente $\mathcal{T}_0$ au point de coordonnées $(0, f(0)) = (0,0)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ qui représente f a pour équation réduite $y = x$.

(b) De plus l'équivalent obtenu en (6) nous permet d'affirmer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite $\mathcal{T}_0$ au-dessus d'un voisinage de 0. En fait, la concavité de la fonction f nous apprend que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite $\mathcal{T}_0$ au dessus de tout l'intervalle $]-1,+\infty[$.



1.3. Relation d'équivalence $\sim$

Définition 9. — *On dit que* <u>*f est équivalente à g au voisinage de a*</u> *et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction α définie sur un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ à valeurs réelles telle que*

- *$f(x) = \alpha(x) g(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$;*
- *$\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$*

Si la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

Remarque 10. — La relation $\sim$ sur l'ensemble des fonctions définies sur un voisinage épointé de a est réflexive, symétrique et transitive. Il s'agit donc d'une relation d'équivalence, ce qui légitime la terminologie adoptée.

La relation suivante est fondamentale dans les calculs de développements asymptotiques.

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}\left(g(x)\right)$$

Exemple 11. — Comme $\sqrt{1-x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$

$$\sqrt{x - x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x} \tag{7}$$

On veillera à ne jamais aditionner d'équivalents. En effet

$$x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \qquad \text{et} \qquad -x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2 + \sqrt{x} \tag{8}$$

mais $x \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ n'est pas vrai.

2. D'une étude locale en un point de $\mathbf{R}$ à une étude locale en 0

Si a est un point de $\mathbf{R}$, étudier une fonction f définie sur un voisinage épointé de a au voisinage de a revient à étudier la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ définie sur un voisinage épointé de 0 au voisinage de 0. Le changement de variable

$$x = a + h \quad , \quad h \to 0$$

permet donc de déplacer l'étude de a en 0.

Exemple 12. — Nous souhaitons étudier localement la fonction $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 2. Pour cela, effectuons le changement de variable $x = 2 + h$:

$$f(2+h) = \ln(3+h) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)$$

Comme $\dfrac{h}{3} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, nous déduisons de (6)

$$f(2+h) \underset{h \to 0}{=} \ln(3) + \frac{h}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{h}{3}\right)^2\right) \underset{h \to 0}{=} \ln(3) + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} + \mathrm{o}\left(h^2\right) \tag{9}$$

d'où

$$\ln(1+x) \underset{x \to 2}{=} \ln(3) + \frac{(x-2)}{3} - \frac{(x-2)^2}{18} + \mathrm{o}\left((x-2)^2\right) \tag{10}$$

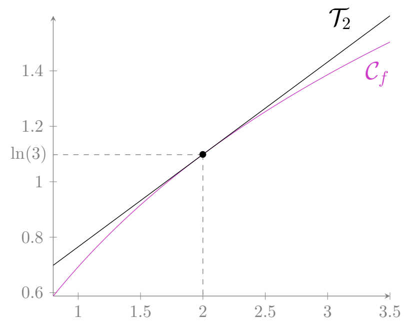
puis

$$\ln(1+x) - \left(\ln(3) + \frac{(x-2)}{3}\right) \underset{x \to 2}{\sim} -\frac{(x-2)^2}{18} \tag{11}$$

Nous en déduisons deux conséquences géométriques.

(a) D'après (9), la tangente $\mathcal{T}_2$ au point de coordonnées $(2, f(2)) = (2, \ln(3))$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ qui représente f a pour équation réduite $y = \ln(3) + \dfrac{1}{3}(x-2)$.

(b) De plus l'équivalent obtenu en (11) nous permet d'affirmer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite $\mathcal{T}_2$ au-dessus d'un voisinage de 2. Comme dans l'exemple 8, la concavité de la fonction f nous apprend que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en fait en dessous de la droite $\mathcal{T}_2$ au-dessus de tout l'intervalle $]-1, +\infty[$.



3. D'une étude locale en $+\infty$ à une étude locale en 0^+

Étudier une fonction f définie sur un voisinage de $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ revient à étudier la fonction $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ définie sur un voisinage épointé de 0 au voisinage de 0^+. Le changement de variable

$$x = \frac{1}{h} \quad , \quad h \to 0^+$$

permet donc de déplacer l'étude de $+\infty$ en 0^+.

Exemple 13. — Nous souhaitons étudier localement la fonction $f\colon x \mapsto \sqrt{x^2+3}$ au voisinage de $+\infty$. Pour cela, effectuons le changement de variable $x = \dfrac{1}{h}$:

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1}{h^2} + 3} = \frac{1}{|h|}\sqrt{1 + 3\,h^2}$$

Comme $3\,h^2 \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$, nous déduisons de (4)

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \to 0^+}{=} \frac{1}{h}\left(1 + \frac{1}{2}\,3\,h^2 + \mathrm{o}\left(3\,h^2\right)\right) \underset{h \to 0^+}{=} \frac{1}{h} + \frac{3}{2}\,h + \mathrm{o}\left(h\right) \tag{12}$$

d'où

$$\sqrt{x^2+3} \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{3}{2\,x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{13}$$

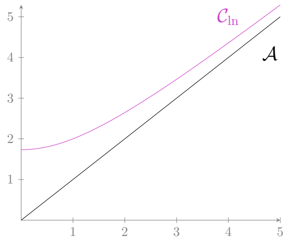
puis

$$\sqrt{x^2+3} - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2\,x} \tag{14}$$

Nous en déduisons deux conséquences géométriques.

(a) D'après (13), la droite $\mathcal{A}$ d'équation réduite $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ qui représente f, au voisinage de $+\infty$.

(b) De plus l'équivalent obtenu en (14) nous permet d'affirmer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite $\mathcal{A}$ au dessus d'un voisinage de $+\infty$.



4. Notion de développement limité

Notation. — Dans cette partie, n est un entier naturel, a désigne un point de $\mathbf{R}$ et f est une fonction définie sur un voisinage épointé de a dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

4.1. Définition d'un développement limité à l'ordre n en un point réel a

Définition 14. — *On dit que f possède un développement limité à l'ordre n au point a (abrégé en « f possède un* $\mathrm{DL}_n(a)$ *») si*

$$\exists\,(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^{n+1} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Un développement limité apporte une information de nature locale, au voisinage du point où le considère. En aucun cas, il ne peut livrer des informations de nature globale, telle une inégalité valable sur tout l'ensemble de définition de la fonction.

Exemple 15. — En (4), nous avons établi

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}\,(x)$$

donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ possède une $\mathrm{DL}_1(0)$.

Exemple 16. — En (10), nous avons établi

$$\ln(1+x) \underset{x\to 2}{=} \ln(3) + \frac{(x-2)}{3} - \frac{(x-2)^2}{18} + \mathrm{o}\left((x-2)^2\right)$$

donc la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ possède une $\mathrm{DL}_2(2)$.

Exemple 17. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme, pour tout $x \in\,]-1,1[$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - x^n \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\underset{x\to 0}{\to 0}}$$

il vient

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\,(x^n) \tag{15}$$

donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ possède une $\mathrm{DL}_n(0)$.

4.2. Unicité d'un développement limité à l'ordre n en un point réel a

Proposition 18. — *Si* $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$ *et* $(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$ *vérifient*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \beta_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

alors, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_k = \beta_k$.

4.3. Troncature d'un développement limité à l'ordre n en un point réel a

Proposition 19. — *Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que*

$$(\star) \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f possède un $\mathrm{DL}_p(a)$ obtenu en tronquant $(\star)$ à l'ordre p, i.e.

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \, (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right)$$

4.4. Développement limité d'une fonction paire/impaire à l'ordre n au point réel 0

Proposition 20. — *Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que*

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

1. *Si la fonction f est paire, alors les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ d'indices impairs sont nuls et donc*

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{2k} \, x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

2. *Si la fonction f est impaire, alors les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ d'indices pairs sont nuls et donc*

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \alpha_{2k+1} \, x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

5. Existence d'un développement limité en un point réel a et régularité de la fonction

Notation. — Dans cette partie, n est un entier naturel, a désigne un point de $\mathbf{R}$ et f est une fonction définie sur un voisinage de a dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. En particulier, la fonction f est définie en a.

5.1. Existence d'un développement limité à l'ordre 0 et continuité

Proposition 21. — *La fonction f admet possède un $\mathrm{DL}_0(a)$ si et seulement si f est continue en a. De plus, si la fonction f est continue en a alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1) \qquad [\mathrm{DL}_0(a) \textit{ de } f]$$

5.2. Existence d'un développement limité à l'ordre 1 et dérivabilité

Proposition 22. — *La fonction f possède un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a. De plus, si la fonction f est dérivable en a alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a) \qquad [\mathrm{DL}_1(a) \textit{ de } f]$$

La proposition 22 est d'une grande utilité pour obtenir des $\mathrm{DL}_1(a)$.

5.3. Prolongement d'une fonction en un point réel a à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1

Proposition 23. — *Soit g une fonction définie sur un voisinage épointé d'un réel a. On suppose qu'il existe des réels α_0, α_1 tels que*

$$g(x) \underset{x \to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$

La fonction g peut être prolongée au point a en une fonction continue en a, en posant $g(a) = \alpha_0$. De plus ce prolongement, abusivement noté g, est dérivable au point a et $g'(a) = \alpha_1$.

5.4. Une fonction possédant un $\mathrm{DL}_2(a)$ n'est pas nécessairement deux fois dérivable en a

Les propositions 21 et 22 n'admettent pas d'extension à des développements limités d'ordres supérieurs. Nous allons en effet démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

1. *La fonction f n'est pas deux fois dérivable en* 0. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$

$$f'(x) = 3\,x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

De plus, comme

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Cependant, comme pour tout $x \in \mathbf{R}^*$

$$\tau_{f',0}(x) := \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3\,x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

la fonction $\tau_{f',0}$ n'admet aucune limite en 0. En effet $\dfrac{1}{2n\pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{2n\pi + \pi/2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ mais

$$\tau_{f',0}\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \tau_{f',0}\left(\frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$$

La fonction f n'est donc pas deux fois dérivable en 0.

2. *La fonction f admet un* $\mathrm{DL}_2(0)$. Si l'on définit la fonction ε par

$$\varepsilon \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \varepsilon(x)\,x^2$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Ainsi

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right) \qquad [\mathrm{DL}_2(0) \text{ de } f]$$

6. Primitivation d'un développement limité

Notation. — Dans cette partie, n est un entier naturel, a désigne un point de $\mathbf{R}$ et f est une fonction définie sur un voisinage de a dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. En particulier, la fonction f est définie en a.

Proposition 24. — *Supposons que f est dérivable sur un voisinage de a et que f' possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que*

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,(x - a)^k + \mathrm{o}\left((x - a)^n\right)$$

Alors f possède un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1}\,(x - a)^{k+1} + \mathrm{o}\left((x - a)^{n+1}\right)$$

Exemple 25. — Nous avons établi en (15) que

$$\frac{1}{1 - x} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Nous en déduisons que

$$-\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\ln(1-0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$$

puis

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} -\frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$$

et par troncature

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} -\frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^{n}\right) \tag{16}$$

Comme $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ nous en déduisons

$$\ln(1+x) = \ln(1-(-x)) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\, x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^{n}\right) \tag{17}$$

7. Formule de Taylor-Young

Théorème 26. — *Soient $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ $a \in I$. Alors la fonction f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_{f,a,n}(x)} + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

où $T_{f,a,n} := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ est appelé polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a.

Démonstration. Nous établissons le théorème dans le cas où a est un point intérieur à I et supposant que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I (renforcement de l'hypothèse de régularité).

1. Comme a est un point intérieur à I, il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset I$.
2. Comme la fonction $f^{(n+1)}$ est définie et continue sur le segment $\left[a - \frac{r}{2}, a + \frac{r}{2}\right]$, le théorème des bornes atteintes nous livre l'existence d'une constant $M > 0$ telle que

$$\forall\, x \in \left[a - \frac{r}{2}, a + \frac{r}{2}\right] \quad \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

3. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in \left[a - \frac{r}{2}, a + \frac{r}{2}\right]$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant M\, \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = |x-a|^n \underbrace{\frac{M\,|x-a|}{(n+1)!}}_{\underset{x\to a}{\to 0}}$$

d'où

$$f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

□

Exemple 27. — La fonction cosinus est paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et on établit, en raisonnant par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\cos^{(2k)}(0) = \cos(k\,\pi) = (-1)^k$. La formule de Taylor-Young livre alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \tag{18}$$

8. Table des développements limités usuels

Notation. — Dans le tableau ci-dessous, n désigne un entier naturel non nul et α un réel.

Développements limités	Indications pour retrouver les développements limités
$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Si $x \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Composition par $x \mapsto -x$ à droite dans le $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et primitivation.
$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	Composition par $x \mapsto -x^2$ à droite dans le $\mathrm{DL}_{n}(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et primitivation.
$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Formule de Taylor-Young et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.
$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$	ch est la partie paire de exp.
$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	sh est la partie impaire de exp.
$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = \mathrm{ch}(ix)$.
$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(ix)}{i}$.
$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$	Par dérivabilité $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$, par produit $\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$, puis primitivation avec $\tan' = 1 + \tan^2$.
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)}{k!}\, x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Formule de Taylor-Young et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la dérivée k-ième de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $x \mapsto \left(\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)\right)(1+x)^{\alpha-k}$ (récurrence sur k)

Exemple 28. — Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Ainsi

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\,x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \tag{19}$$

Exemple 29. — Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$. Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\,x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{5}{16}\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \tag{20}$$

9. Opérations sur les développements limités

9.1. Combinaison linéaire de deux développements limités

Proposition 30. — *Soient λ_1, λ_2 deux réels, f_1, f_2 deux fonctions définies au voisinage d'un même réel a et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f_1 et f_2 possèdent un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $P_1 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que*

$$f_1(x) \underset{x\to a}{=} P_1(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \underset{x\to a}{=} P_2(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors la fonction $\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2$, qui est définie au voisinage de a, possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$\lambda_1\, f_1(x) + \lambda_2\, f_2(x) \underset{x\to a}{=} \lambda_1\, P_1(x-a) + \lambda_2\, P_2(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Exemple 31. — D'après la table des développements limités usuels

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \tag{21}$$

donc

$$\ln(1+x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \tag{22}$$

9.2. Produit de deux développements limités

Notation. — Si $n \in \mathbf{N}$, l'opérateur de troncature à l'ordre n est l'application τ_n définie par

$$\tau_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} [P]_k\, X^k \end{array} \right.$$

Exemple 32. — $\tau_3\left(X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 7X^2 + 12X + 1\right) = 3X^3 - 7X^2 + 12X + 1$ et $\tau_3\left(X^2 - 7X + 3\right) = X^2 - 7X + 3$

Proposition 33. — *Soient f_1, f_2 deux fonctions définies au voisinage d'un même réel a et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f_1 et f_2 possèdent un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $P_1 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que*

$$f_1(x) \underset{x\to a}{=} P_1(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \underset{x\to a}{=} P_2(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors la fonction $f_1\, f_2$, qui est définie au voisinage de a, possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$f_1(x)\, f_2(x) \underset{x\to a}{=} \left(\tau_n\left(P_1 \times P_2\right)\right)(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Quand on effectue le produit de deux développements limités à l'ordre n, on ne conserve que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n.

Exemple 34. — On souhaite établie que la fonction $x \mapsto e^x\, \ln(1+x)$ possède un $\mathrm{DL}_3(0)$ et le calculer. D'après la table des développements limités usuels

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

donc

$$e^x \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3\right)\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3\right) + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Comme

$$\begin{array}{rclcccccc}
1\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3\right) & \underset{x\to 0}{=} & x & - & \frac{1}{2}\,x^2 & + & \frac{1}{3}\,x^3 & & \\
x\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3\right) & \underset{x\to 0}{=} & & & x^2 & - & \frac{1}{2}\,x^3 & + & \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
\frac{1}{2}\,x^2\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3\right) & \underset{x\to 0}{=} & & & & & \frac{1}{2}\,x^3 & + & \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
\frac{1}{6}\,x^3\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3\right) & \underset{x\to 0}{=} & & & & & & & \mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{array} \qquad \text{[noter la disposition des calculs]}$$

nous obtenons

$$e^x \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \tag{23}$$

9.3. Composition de deux DL en 0

Proposition 35. — *Soient f, g deux fonctions définies au voisinage d'un réel 0 et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que*

1. $f(0) = 0$
2. *f et g possèdent un $\mathrm{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right) \qquad \textit{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Alors la fonction $g \circ f$, qui est définie au voisinage de 0, possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$g(f(0)) \underset{x\to 0}{=} \left(\tau_n\left(Q \circ P\right)\right)(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Exemple 36. — On souhaite établie que la fonction $x \mapsto e^{\tan(x)}$ possède un $\mathrm{DL}_4(0)$ et le calculer. D'après la table des développements limités usuels

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \qquad \text{et} \qquad \tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \qquad [\tan \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ et impaire}]$$

Comme $\tan(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$e^{\tan(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Comme

$$\begin{array}{rclcccccc}
1 & \underset{x\to 0}{=} & 1 & & & & & & \\
\left(x + \frac{x^3}{3}\right) & \underset{x\to 0}{=} & & x & & + \frac{1}{3}\,x^3 & & & \\
\frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 & \underset{x\to 0}{=} & & & \frac{1}{2}\,x^2 & & \frac{1}{3}\,x^4 & + & \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
\frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 & \underset{x\to 0}{=} & & & & \frac{1}{6}\,x^3 & & + & \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
\frac{1}{24}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^4 & \underset{x\to 0}{=} & & & & & \frac{1}{24}\,x^4 & + & \mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{array} \qquad \text{[noter la disposition des calculs]}$$

nous obtenons

$$e^{\tan(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{3}{8}\,x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \tag{24}$$

9.4. Inverse d'un DL en 0

Proposition 37. — *Soient f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que*

1. $f(0) \neq 0$
2. *f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Alors la fonction $\frac{1}{f}$, qui est définie au voisinage de 0, possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$(\star\star) \qquad \frac{1}{f(x)} \underset{x\to 0}{=} \left(\tau_n\left(\frac{1}{f(0)}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{P}{f(0)}\right)^k\right)\right)(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Remarque 38. — La proposition 37 assure l'existence d'un développement limité pour l'inverse d'une fonction, lorsque deux hypothèses sont vérifiées. En pratique, on n'applique pas la formule $(\star\star)$ pour calculer le développement limité d'un inverse. On préfère utiliser une composée de développements limités, en considérant les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ou $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, comme on l'illustre dans l'exemple suivant.

Exemple 39. — On souhaite établie que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ possède un $\mathrm{DL}_4(0)$ et le calculer. D'après la table des développements limités usuels

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

Comme $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \tag{25}$$