

Exercice 9:

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$,
et π_{F_n} le projecteur orthogonal de E
sur F_n .

Soit $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$,

$(\pi_{F_n}(x), x - \pi_{F_n}(x))$ est une famille
orthogonale.

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|\pi_{F_n}(x)\|^2 + \underbrace{\|x - \pi_{F_n}(x)\|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|\pi_{F_n}(x)\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \|\pi_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

Donc on a bien :

$$\sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

2. La suite $(\sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée d'après la question 1.

De plus, elle est positive.

Donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle^2$ converge.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n - x \right\| = d(x, F_N).$$

- la suite (F_n) est croissante au sens de l'inclusion

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n} = E$$

Montrons alors que (1) $d(x, F_n) \rightarrow d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n)$
et que (2) $d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = 0$:

(1): Soit $n \in \mathbb{N}$, $y \in F_n$,
alors $y \in F_{n+1}$.

Alors $\|x - y\| \geq d(x, F_{n+1})$,
d'où par passage à la borne inférieure :

$$d(x, F_n) \geq d(x, F_{n+1})$$

De plus, $(d(x, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.

Donc $\exists l \in \mathbb{R}, d(x, F_n) \rightarrow l$

$$\text{et } l = \inf_{n \in \mathbb{N}} (d(x, F_n)).$$

Montrons donc que $l = d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n)$:

Soit $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$,

$\exists k \in \mathbb{N}, y \in F_k$,

$$\text{donc } \|x - y\| \geq d(x, F_k) \geq l.$$

Donc par passage à la borne inférieure sur $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$:

$$d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) \geq l.$$

Soit $k \in \mathbb{N}, y \in F_k$,

$$y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \text{ donc } \|x - y\| \geq d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n)$$

donc par passage à la borne inférieure:

$$d(x, F_k) \geq d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n)$$

où $d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n)$ est indépendant de k ,
 et par passage à la limite :

$$l \geq d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n).$$

Ainsi, $l = d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n).$

(2): Soit $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n} = E, \text{ donc } \exists g \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

$$\|x - g\| \leq \varepsilon$$

$$\text{donc } 0 \leq d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) \leq \varepsilon,$$

$$\text{d'où } d(x, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = 0.$$

Finalement, $\left\| \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k - x \right\| \rightarrow 0,$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \text{ converge}$$

$$\text{et } \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = x.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle x, \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k \rangle = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2$$

L'application $\langle x, \cdot \rangle$ est $\mathcal{E}'$ car linéaire,

$$\text{et } \forall y \in \mathcal{E}, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

(Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\text{donc } \langle x, \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k \rangle \longrightarrow \|x\|^2$$

(question 3.)

$$\text{et } \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2 \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle^2$$

(question 2.)

Par unicité de la limite :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle^2$$