

TD – Procédés sommatoires discrets

Exercice de la banque CCINP n°5. —

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Cas $\alpha \leq 0$. En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) Cas $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série. On pourra utiliser la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Exercice de la banque CCINP n°6. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge. On pourra écrire, judicieusement, la définition de

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice de la banque CCINP n°7. —

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}$. Le symbole i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Exercice de la banque CCINP n°46. — On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.

3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice de la banque CCINP n°54. — Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2. On pose, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

(a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

(b) Prouver que, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

(c) On pose, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$. Prouver que f est continue sur E .

Exercice 1 ★☆☆ — Étudier la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants.

- | | | |
|---|---|--|
| (1) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e}$ | (2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ | (3) $u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$ |
| (4) $u_n = \frac{3^n}{n}$ | (5) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ | (6) $u_n = \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$ |
| (7) $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ | (8) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ | (9) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ |
| (10) $u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$ | (11) $u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ | (12) $u_n = 3^{1/n} - 2^{1/n}$ |
| (13) $u_n = (\cos(n) + \sin(n)) e^{-n}$ | (14) $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ | (15) $u_n = e^{1/n} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ |
| (16) $u_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ | (17) $u_n = \frac{n}{3 + \cos(n)}$ | (18) $u_n = \frac{\sin(n)}{n^{3/2}}$ |
| (19) $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln(n)}$ | | |

natureSerieNiveau1 [indication(s)]

Exercice 2 ★★☆☆ — Dans chacun des cas suivants, démontrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|---|
| (1) $u_n = \frac{1}{n^2-1}$ | (2) $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ | (3) $u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$ |
|-----------------------------|-----------------------------------|---|

convergenceCalculSommeNiveau1

Exercice 3 ★★☆☆ — Étudier la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants.

- | | |
|---|---|
| (1) $u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+2)!}$ | (2) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^n}$ |
|---|---|

natureSerieNiveau2

Exercice 4 ★★☆☆ — Étudier la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants, où α, β et x sont des réels.

- | | | |
|---|--------------------------------|---|
| (1) $u_n = \text{ch}(n^\alpha) - \text{sh}(n^\alpha)$ | (2) $u_n = \frac{n! x^n}{n^n}$ | (3) $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ |
|---|--------------------------------|---|

natureSerieAvecParametre

Exercice 5 ★☆☆ — Donner une équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ dans chacun des cas suivants.

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| (1) $u_n = \ln(n!)$ | (2) $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ | (3) $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$ |
| (4) $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2(k)$ | | |

equivalentAvecComparaisonSerieIntegrale

Exercice 6 ★★☆☆ — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Remarquons que la règle de d'Alembert ne s'applique pas (« cas limite où $\ell = 1$ »).

1. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Déterminer des constantes réelles a et b telles que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. Démontrer que si $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

3. Démontrer que si $\alpha < 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

4. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a(a+1) \dots (a+n)}{b(b+1) \dots (b+n)}$ en fonction du couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

regleRaabeDuhamel

Exercice 7 ★★☆☆ — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes convergeant vers un complexe ℓ .

1. Démontrer que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell \quad [\text{théorème de Cesàro}]$$

2. Soit α un réel strictement positif fixé. Considérons une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $v_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n^\alpha}$$

(a) Étudier le comportement asymptotique de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Déterminer un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra chercher un exposant $\beta > 0$ tel que la suite de terme général $v_{n+1}^\beta - v_n^\beta$ possède une limite finie non nulle.

theoremeCesaroEquivalentSuiteRecurrente

Exercice 8 ★★★ — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que

$${}^n\sqrt{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

1. Démontrer que si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

2. Démontrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Déterminer la nature de la série $\sum n^\alpha z^n$.

regleCauchy [indication(s)]

Exercice 9 ★★★ — Démontrer que la série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge et calculer sa somme. On pourra utiliser le développement asymptotique

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

convergenceCalculSommeSerieAvecDeveloppementAsymptotiqueHnPrecision01 [indication(s)]

Exercice 10 ★★★ — Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$.

natureSerieCondensationSommesPartielles [indication(s)]

Exercice 11 ★★★ — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs. Supposons qu'il existe un réel a tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^a}$

regleRaabeDuhamelVersionFaible

Exercice 12 ★★★ — Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}}$.

equivalentProduit

Exercice 13 ★★★ — Soit $\alpha > 1$.

1. Démontrer que $\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{\alpha}$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n P(k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

equivalentSommeValeursPolynome

Exercice 14 ★★★ — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. Supposons que la série $\sum a_n$ converge. Démontrer que la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

2. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge et la série $\sum a_n$ diverge.

serieRacineCarreeDeuxTermesConsecutifs

Exercice 15 ★★★ — Pour tout $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{k=1}^n [\log(k)]$ et $T_n = S_{10^n - 1}$, où \log est le logarithme décimal.

1. Déterminer des équivalents de S_n et T_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer T_n , pour tout $n \geq 1$, et retrouver le résultat précédent.

seriePartieEntiereLogDecimal

Exercice 16 ★★★ — Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. Justifier que la série $\sum n z^n$ converge et calculer sa somme.

sommeSerieGeometriqueDerivee

Exercice 17 ★☆☆ — Pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, notons

$$u_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \geq m + 1 \\ 0 & \text{si } n \leq m. \end{cases}$$

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\forall n \geq m + 2, \quad \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m!} \left(1 + \sum_{k=m+2}^n \frac{1}{k(k-1)}\right)$$

2. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,m}$ converge, et que sa somme est majorée par $\frac{2}{m!}$.

3. Démontrer que la série de terme général $\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge, puis que $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

ecritureExponentielle1SommeRestes

Exercice 18 ★★★ — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est bien définie.
2. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

sommeRestesSerieHarmoniqueAlternee

Exercice 19 ★★★ — Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{m^2n + n^2m + 2mn} \right)_{(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.

calculSommeDoubleX

Exercice 20 ★☆☆ — Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n}$ converge avec une somme donnée par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

developpementSerieLogarithme [corrigé]

Indication(s) pour l'exercice 1

1. Déterminer un équivalent de

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e} = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{e}$$

Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

2. Il s'agit d'une série télescopique.

3. Déterminer un équivalent de

$$u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n} = n^{1/n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n} - 1 \right) = n^{1/n} \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1 \right)$$

Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

4. Appliquer les résultats sur les croissances comparées pour étudier la limite de $u_n = \frac{3^n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Calculer un développement asymptotique de

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2}$$

avec précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Appliquer ensuite

- le critère des séries alternées
- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs
- le résultat sur la somme de deux séries convergentes.

6. En observant que

$$\operatorname{ch}(n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2} = \frac{e^n}{2} (1 + e^{-2n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$$

donner un équivalent de $u_n = \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$, Appliquer ensuite

- le critère de convergence des séries géométriques
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

7. Déterminer un développement asymptotique de

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{1/2} - 1$$

avec précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Appliquer ensuite

- le critère des séries alternées
- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs
- le résultat sur la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

8. • *Première approche.* Appliquer la formule de Stirling et les résultats sur les croissances comparées pour obtenir

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.
- *Deuxième approche.* Appliquer la règle de d'Alembert, en justifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$$

9. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

- *Première approche.* Prendre appui sur la quantité conjuguée

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}} = \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^4-1} (\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}$$


qui permet d'obtenir aisément un équivalent de u_n . Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.
- *Deuxième approche.* Déterminer un développement asymptotique de

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \right) = \frac{1}{n} \left(\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} \right)$$

avec précision $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

 Cette deuxième stratégie se généralise à la série $\sum \frac{1}{(n^2-1)^\alpha} - \frac{1}{(n^2+1)^\alpha}$, où α est un réel positif fixé.

10. Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$ avec précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

11. Comparer $u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ à $\frac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \geq 3$. Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de domination pour les séries à termes positifs.

12. Déterminer un équivalent de

$$u_n = 3^{1/n} - 2^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(3)}{n}\right) - \exp\left(\frac{\ln(2)}{n}\right)$$

Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

13. Observer que

$$u_n = (\cos(n) + \sin(n)) e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\left(\frac{1}{e}\right)^n\right)$$

Appliquer ensuite

- le critère de convergence des séries géométriques
- le théorème de domination pour les séries à termes positifs.

14. Appliquer la formule de Stirling pour obtenir un équivalent de $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$, puis

- le critère de Riemann
- le théorème de le théorème de domination pour les séries à termes positifs.



La règle de d'Alembert ne s'applique pas ici. Certes, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$ et u_n est « de nature multiplicative », mais $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

15. Déterminer un développement asymptotique de $u_n = e^{1/n} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ avec précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Appliquer ensuite

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

16. D'après la formule donnant la somme de Newton $\sum_{k=1}^n k^2$

$$u_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

Déterminer alors un équivalent de u_n , puis appliquer

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

Grâce à la décomposition en éléments simples

$$\frac{6}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{6}{X+1} - \frac{24}{2X+1} + \frac{6}{X}$$

au développement asymptotique

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1) \quad [\gamma \in]0, 57; 0, 58[\text{ est la constante d'Euler}]$$



et à l'identité

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n$$

on peut non seulement proposer une démonstration alternative de la convergence de la série $\sum u_n$, mais encore obtenir la valeur de sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 18 - 24 \ln(2)$$

17. Comparer $u_n = \frac{n}{3 + \cos(n)}$ à $\frac{n}{4}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

- le critère de Riemann
- le théorème de domination pour les séries à termes positifs.

18. Observer que, si $\alpha \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$, alors

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^{3/2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

puis appliquer

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

19. Observer que

$$\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

En déduire

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{5/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad [\text{bien justifier la dernière relation}]$$

Appliquer enfin

- le critère de Riemann
- le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

Indication(s) pour l'exercice 8

1. Soit $q \in]\ell, 1[$. Comme $] -\infty, q[$ est un ouvert contenant ℓ

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{u_n} < q$$

d'où

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq u_n < q^n$$

On applique alors le théorème de domination pour les séries à termes positifs.

2. Soit $q \in]1, \ell[$. Comme $]q, +\infty[$ est un ouvert contenant ℓ

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{u_n} > q$$

d'où

$$\forall n \geq N \quad u_n > q^n$$

On en déduit la divergence grossière de la série $\sum u_n$.

3. • *Cas où $|z| \neq 1$.* On peut étudier le comportement asymptotique de

$$\sqrt[n]{|n^\alpha z^n|} = n^{\alpha/n} |z| = \exp\left(\frac{\alpha}{n} \ln(n)\right) |z|$$

lorsque n tend vers $+\infty$, puis les résultats des questions 1 et 2. La règle de d'Alembert peut aussi être appliquée.

- *Cas où $|z| = 1$.*

— Pour $\alpha \geq 0$, la série $\sum n^\alpha$ est grossièrement divergente.

— Si $\alpha < -1$, le critère de Riemann livre la convergence absolue de la série $\sum n^\alpha z^n$.

— Si $\alpha \in [-1, 0[$ et $z = 1$, le critère de Riemann permet de conclure sur la nature de la série $\sum n^\alpha z^n$.

— Si $\alpha \in [-1, 0[$ et $z \neq 1$, on introduit $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$ et on applique une transformation d'Abel.

convergenceCalculSommeSerieAvecDeveloppementAsymptotiqueHnPrecision01 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 9

La convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ peut être établie en appliquant le critère des séries alternées. Pour déterminer sa somme, il suffit de déterminer la limite de la suite de terme général

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} H_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} \right) \\ &= \frac{\ln(2)}{2} H_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(2)}{2} H_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2) H_n - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \end{aligned}$$

On démontre ensuite

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2(n)$$

puis qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \ln^2(n) + C + o(1)$$

à l'aide du théorème de sommation des relations de comparaison.

Indication(s) pour l'exercice 10

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k}$.

- Soit $n \geq 2$.

$$S_{(n+1)^2-1} = \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{i} \rfloor}}{i} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \underbrace{\sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i}}_{u_k}$$

- Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante, en effectuant une comparaison série-intégrale.
- Conclure quant à la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$, donc de la suite $(S_{(n+1)^2-1})_{n \geq 2}$.
- Considérer un entier $p \in \mathbf{N}^*$ et l'entier naturel n tel que

$$n \leq \sqrt{p} < n+1 \quad [n \text{ est donc la partie entière de } p]$$

puis comparer la somme S_p aux deux sommes S_{n^2-1} et $S_{(n+1)^2-1}$, que l'on sait converger et avoir une limite commune.

Un corrigé de l'exercice 20

Remarquons que l'assertion est claire si $x = 0$. Fixons $n \in \mathbf{N}$ et considérons la fonction

$$f_n \left\{ \begin{array}{l}]0, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \end{array} \right.$$

dérivable sur $] -1, 1[$. Nous calculons

$$\forall x \in] -1, 1[\quad f'_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Fixons $x \in] -1, 0[\cup]0, 1[$. D'après le théorème fondamental de l'analyse

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = f_n(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt = -\ln(1-x) - x^{n+2} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1-xu} du \quad [u = t/x] \quad (1)$$

L'intérêt du changement de variable réside dans l'ordre entre les bornes de l'intégrale (l'ordre entre 0 et x n'est pas connu, mais $0 \leq 1$), cf. inégalité triangulaire appliquée ci-dessous. De (1) et de

$$\forall u \in [0, 1] \quad |1 - xu| \geq 1 - |xu| \geq 1 - |x| > 0$$

nous déduisons

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) \right| \leq |x|^{n+2} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{|1-xu|} du \leq \frac{|x|^{n+2}}{1-|x|} \int_0^1 u^{n+1} du = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En appliquant le théorème d'encadrement, nous obtenons la convergence de la série de terme général $\frac{x^n}{n}$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$