TD – Dénombrement et probabilités de MP2I

1. Exercices d'application du cours

Exercice 1 (Banque CCINP n°112). — *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments.*

1. *Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.*
2. *Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.*
3. *Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B, C soient deux à deux disjoints et $A \cup B \cup C = E$.*

Exercice 2 (Banque CCINP n°95). — *Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.*

1. *Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche, il gagne deux points, et, pour chaque boule noire, il perd trois points. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées et Y la variable aléatoire donnant le nombre de points du joueur.*
   (a) *Déterminer la loi de la variable aléatoire X, son espérance, sa variance.*
   (b) *Déterminer la loi de la variable aléatoire Y, son espérance, sa variance.*
2. *Dans cette question, on suppose que les tirages se font sans remise.*
   (a) *Déterminer la loi de la variable aléatoire X.*
   (b) *Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.*

Exercice 3 (Banque CCINP n°98). — *Une personne effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.*

1. *Donner la loi de X. Justifier.*
2. *La personne rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.*
   (a) *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y = k \mid X = i)$.*
   (b) *Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.*
   (c) *Déterminer l'espérance et la variance de Z.*

Exercice 4 (Banque CCINP n°99). —

1. *Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.*
2. *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi. On pose $X = X_1 + \ldots + X_n$. Démontrer que :*

$$\forall\, a > 0 \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \mathbf{E}(X_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X_1)}{na^2}.$$

3. *Application : on effectue n tirages successifs et mutuellement indépendants d'une boule, avec remise, dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quelle valeur de n peut-on affirmer que la proportion de boules rouges obtenues est comprise, avec une probabilité de 95%, entre 0.35 et 0.45 ?*

Exercice 5 (Banque CCINP n°104). — *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.*

1. *Préciser les valeurs prises par* X.
2. (a) *Déterminer la probabilité* $\mathbf{P}(X=2)$.
   (b) *Finir de déterminer la loi de probabilité de* X.
3. (a) *Calculer* $\mathbf{E}(X)$.
   (b) *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X)$. *Interpréter ce résultat.*

Exercice 6 (Banque CCINP n°105). —

1. *Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.*
2. *On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).*
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) *On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?*
   (b) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé* n *fois et on obtient* n *fois le chiffre* 6. *Quelle est la probabilité* p_n *que ce dé soit pipé ?*
   (c) *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. *Interpréter ce résultat.*

Exercice 7 (Banque CCINP n°107). — *On dispose de deux urnes* U_1 *et* U_2. *L'urne* U_1 *contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne* U_2 *contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne* U_1. *Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne* U_2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* B_n *l'événement « la boule tirée au* $n^{\text{ième}}$ *tirage est blanche » et on pose* $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.

1. *Calculer* p_1.
2. *Prouver que, pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}\,p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. *En déduire, pour tout entier naturel* n *non nul, la valeur de* p_n.

Exercice 8 (formule de Vandermonde ou des comités). — *Soient* a, b, n *des entiers naturels tels que* $n \leqslant a+b$. *Démontrer :*

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

Exercice 9 (formule des colonnes). — *Soient* n, m *des entiers naturels tels que* $n \leqslant m$. *Démontrer que :*

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

Exercice 10 (loi hypergéométrique). — *Soient des entiers naturels* n, m, N *tels que* $m \leqslant N$ *et* $n \leqslant N$. *Une urne contient* N *boules dont* m *sont rouges. On tire* n *boules sans remise et on note* X *la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.*

1. *Déterminer la loi de* X.
2. *Calculer l'espérance et la variance de* X.

---

2. Exercices de difficulté moyenne

Exercice 11 (formule du multinôme). — *Soient* A *un anneau commutatif,* n, p *des entiers naturels non nuls et* $(a_1, \ldots, a_p) \in A^p$. *On pose :*

$$I := \{(k_1, \ldots, k_p) \in \mathbf{N}^p \ : \ k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n\}$$

Démontrer que :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^n = \sum_{(k_1,\ldots,k_p)\in I} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_p!}\, a_1^{k_1}\, a_2^{k_2}\, \ldots\, a_p^{k_p}$$

Exercice 12 (inversion de Pascal et nombre de surjections). — *Pour tout $(p,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, on note $s_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$.*

1. *Soit $(p,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Démontrer que :*
$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_{p,k}$$
2. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$:*
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$
Démontrer que :
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \qquad \text{[formule d'inversion de Pascal]}$$
3. *Soit $(p,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Démontrer que :*
$$s_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Exercice 13. — *Soient $p \in]0,1[$, $(n,m) \in \mathbf{N}^2$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. Calculer la loi de $Z = X+Y$, puis donner son espérance et sa variance.*

Exercice 14. — *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles toujours indépendantes ?*

Exercice 15 (fonction caractéristique). — *Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{Z}$ une variable aléatoire. On appelle fonction caractéristique de la fonction :*
$$\varphi_X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ u & \longmapsto & \mathbf{E}\left(e^{iuX}\right) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique.*
2. *Calculer $\varphi_X(0), \varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$.*
3. *Soient $(p,n) \in]0,1[\times\mathbf{N}^*$. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi de $\mathcal{B}(p)$, puis d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$.*
4. *Soit $n \in \mathbf{Z}$. Démontrer que :*
$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\, e^{-iun}\ \mathrm{d}u$$
5. *Soit $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{Z}$ une variable aléatoire. Démontrer que, si $\varphi_X = \varphi_Y$, alors X et Y ont même loi.*
6. *On suppose ici que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Démontrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.*

Exercice 16. — *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.*

1. *Exprimer $\mathbf{E}(X)$ en fonction des $\mathbf{P}(X \geqslant 1), \ldots, \mathbf{P}(X \geqslant n)$.*
2. *On suppose les variables aléatoires X et Y de loi uniforme. Déterminer l'espérance de $\min(X,Y)$, de $\max(X,Y)$ puis de $|X-Y|$.*

Exercice 17. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Soit X la variable aléatoire définie par :*
$$X \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & [\![0,n]\!] \\ \sigma & \longmapsto & |\{k \in [\![1,n]\!] \ :\ \sigma(k) = k\}| \end{array} \right.$$
Déteminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 18. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On prélève des boules sans remise jusqu'à ce que toutes les boules rouges aient été tirées. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires au tirage de toutes les boules rouges.*

1. *Déteminer la loi de X.*
2. *Déterminer l'espérance et la variance de X.*

Exercice 19. — *Soient un entier $n \geqslant 2$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi. On note m leur espérance et σ^2 leur variance.*

1. *Calculer l'espérance et la variance de $X = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$.*
2. *Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_i - X)^2$.*

Exercice 20. — *Soient $p \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$:*

$$\mathbf{P}\left(X_n \leqslant k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 21 (Centrale). — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire aléatoirement k boules en une seule prise. On note X la variable aléatoire donnant le plus petit numéro tiré.*

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1}\binom{n-i}{k-1}$.*
3. *Calculer $\mathbf{E}\left(X\right)$.*

Exercice 22 (Mines-Télécom). —

1. *Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.*
2. *Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini. Démontrer que :*

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}\left(X \geqslant x\right) \leqslant e^{-2x}\,\mathbf{E}\left(e^{2X}\right)$$

Exercice 23 (Mines-Télécom). — *Démontrer qu'on ne peut pas truquer deux dés de sorte que la variable renvoyant la somme des chiffres des deux dés suive la loi uniforme.*

Exercice 24 (Mines-Ponts). — *Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0,1[$. On pose :*

$$U := (X_1, \ldots, X_n) \qquad , \qquad V := (Y_1, \ldots, Y_n) \qquad \text{et} \qquad M := U^\top V$$

Déterminer la loi du rang de M.

Exercice 25 (Mines-Ponts). — *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. On tire au hasard deux parties A et B de E et on définit les variables aléatoires $I = \mathrm{Card}(A \cap B)$ et $U = \mathrm{Card}(A \cup B)$.*

1. *Déterminer la loi de I.*
2. *Calculer les variances de I et U.*

Exercice 26. — *Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, p_n\right)$. Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $n\,p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$:*

$$\mathbf{P}\left(X_n = k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

3. Exercices difficiles

Exercice 27. — *Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Déterminer le nombre de p-uplets $(a_1, \ldots, a_p)$ d'entiers naturels tels que $a_1 + \ldots + a_p = n$.*

Exercice 28. — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers. Démonrer qu'il y a un sous-ensemble de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dont la somme des éléments est divisible par n.*

Exercice 29 (ÉNS). — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dénombrer les listes $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ où ne figurent pas deux 1 consécutifs.*

Exercice 30 (ÉNS). — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note D_n le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe. Donner une relation entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n.*

Exercice 31 (ÉNS). — *Soit G un groupe fini. Pour toute partie X, Y non vides de G, on pose :*

$$X^{-1} = \left\{x^{-1} \ : \ x \in X\right\} \qquad \text{et} \qquad XY = \{xy \ : \ (x,y) \in X \times Y\}$$

Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

1. *On suppose que $|XX| < |X|$. Démontrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.*
2. *On suppose que $\left|XX^{-1}\right| < \dfrac{3}{2}|X|$ Démontrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.*

Exercice 32. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On tire les boules 2 par 2 jusqu'à ce que l'urne soit vide. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche et une boule noire au i-ème tirage, où $i \in [\![1, n]\!]$.*
