

TD – Calcul différentiel 2

Exercice de la banque CCINP n°41. — Soient f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f: (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$$

et $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C .
2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extrema.
 - (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :

$$(S) \quad \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

(b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ .

3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v) , puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

Exercice de la banque CCINP n°56. — Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$$

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbf{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Justifier que f admet un maximum global sur K , puis le déterminer.

Exercice 1 ★☆☆ — Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \\ (x, y) & \longmapsto (x^2 + y^2) e^{x^2 - y^2} \end{array} \right. \mathbf{R}$$

1. La fonction f possède-t-elle un maximum global ?
2. Justifier que la fonction f possède un minimum global, atteint en un unique point de $\mathbf{R}^2$.
3. Étudier les extrema locaux de la fonction f et les points en lesquels ils sont atteints.

extremaLocauxGlobauxFonctionDeuxVariables1 [indication(s)]

Exercice 2 ★★★ — Soit la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \\ (x, y) & \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \end{array} \right. \mathbf{R}$$

1. La fonction f possède-t-elle un maximum global ?
2. Étudier les extrema locaux de la fonction f et les points en lesquels ils sont atteints.
3. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Factoriser l'expression $f(x, y) + 8$ et en déduire son signe. Qu'en déduire ?

extremaLocauxGlobauxFonctionDeuxVariables2 [indication(s)]

Exercice 3 ★★★ — On considère la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \\ (x, y) & \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy \end{array} \right. \mathbf{R}$$

1. La fonction f possède-t-elle un maximum global ?

2. Démontrer que :

$$f(x, y) \xrightarrow{\|(x, y)\|_\infty \rightarrow +\infty} +\infty$$

puis que la fonction f possède un minimum global.

3. Étudier les extrema locaux de la fonction f et les points en lesquels ils sont atteints.

extremaLocauxGlobauxFonctionDeuxVariables3 [indication(s)]

Exercice 4 ★★★ — Soit la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow \\ (a, b, c) & \longmapsto \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt \end{array} \right. \mathbf{R}$$

1. La fonction f possède-t-elle un maximum global ?

2. Démontrer que la fonction f possède un minimum global, atteint en un unique point de $\mathbf{R}^3$.

3. Étudier les extrema locaux de la fonction f et les points en lesquels ils sont atteints.

extremaLocauxGlobauxFonctionTroisVariables1 [indication(s)]

Exercice 5 ★★★ — Soient $a > 0$ et :

$$f \left| \begin{array}{ll}]0, +\infty[^n & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Sigma := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n : \sum_{i=1}^n x_i = a \right\}$$

1. Étudier les variations et la convexité de la fonction φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto t \ln(t) \end{array} \right.$$

2. En déduire que la restriction de la fonction f à Σ est bornée.

3. La partie Σ de $\mathbf{R}^n$ est-elle compacte ?

4. Démontrer que la restriction de la fonction f à Σ est minorée par $a \ln\left(\frac{a}{n}\right)$.

5. Étudier les extrema locaux, globaux de f sur Σ et les points en lesquels ils sont atteints.

extremaLies [indication(s)]

Exercice 6 ★★★ — On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et S la sphère unité de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \|\cdot\|)$. Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^n & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (C_1, \dots, C_n) & \longmapsto \det(C_1, \dots, C_n) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la restriction de la fonction f à S^n possède un maximum global et que ce dernier est strictement positif.

2. Soit $(C_1, \dots, C_n)$ un point de S^n en lequel la restriction de la fonction f à S^n atteint son maximum. Démontrer que la matrice $(C_1, \dots, C_n)$ est orthogonale.

3. En déduire que :

$$\forall (C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^n \quad |\det(C_1, \dots, C_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\| \quad [\text{inégalité de Hadamard}]$$

inegaliteHadamardExtremaLies [corrigé]

Indication(s) pour l'exercice 1

1. $f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$.
Le nombre 0 est donc le minimum global de la fonction f et il est atteint en $(0, 0)$.
Il est clair que la fonction f prend des valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, en appliquant le critère $\mathcal{C}^1$.
Remarquer que $\mathbf{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$.
Soit (x, y) un point de $\mathbf{R}^2$ en lequel f admet un extremum local. Alors :

$$\nabla f(x, y) = \left(2x e^{x^2-y^2} (x^2 + y^2 + 1), -2y e^{x^2-y^2} (x^2 + y^2 - 1) \right) = (0, 0)$$

Nous en déduisons que $(x, y) = (0, 0)$. Nous savons qu'en $(0, 0)$ la fonction f atteint un minimum global. La fonction f ne possède aucun autre minimum local, ni aucun maximum local.

Indication(s) pour l'exercice 2

1. $f(t, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$
2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, puisque polynomiale.
Remarquer que $\mathbf{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$.
Soit (x, y) un point de $\mathbf{R}^2$ en lequel f admet un extremum local. Alors :

$$\nabla f(x, y) = (4(x^3 - x + y), 4(x + y^3 - y)) = (0, 0)$$

On en déduit que $(x, y) \in \{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Comme la trace et le déterminant de :

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

sont strictement positifs, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$ est un minimum local de la fonction f , atteint en les deux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Comme :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres 0 et -8 , $H_f(0, 0) \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbf{R})$, la fonction f ne peut pas atteindre de minimum local en $(0, 0)$.
Comme :

$$f(0, 0) - f(t, t) = -2t^4 < 0$$

la fonction $f(0, 0) - f$ ne peut être positive sur un voisinage de $(0, 0)$. La fonction f n'atteint donc pas un maximum local en $(0, 0)$.

3. Comme :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x, y) + 8 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 \geq 0$$

la fonction f admet -8 comme minimum global. Ce dernier est atteint en les seuls points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
La fonction f ne possède aucun autre minimum local, ni aucun maximum local.

extremaLocauxGloauxFonctionDeuxVariables3 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 3

$$1. f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

2. Considérons $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et notons $r := \|(x, y)\|_\infty$. Comme $r \in \{|x|, |y|\}$, $x^4 \geq 0$ et $y^4 \geq 0$:

$$x^4 + y^4 \geq r^4$$

De plus :

$$4xy \leq 4|x||y| \leq 4r^2$$

Ainsi :

$$f(x, y) \geq r^4 - 4r^2 \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$$

Comme la fonction r est coercive, il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{B_\infty((0, 0), r)} \quad f(x, y) \geq f(0, 0)$$

La fonction f est continue (polynomiale) sur le compact $\overline{B_\infty((0, 0), r)}$ (partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$, de dimension finie). D'après le théorème des bornes atteintes :

$$\exists (x_m, y_m) \in \overline{B_\infty((0, 0), r)} \quad \forall (x, y) \in \overline{B_\infty((0, 0), r)} \quad f(x, y) \geq f(x_m, y_m)$$

Justifier que $f(x_m, y_m)$ est le minimum global de f sur $\mathbf{R}^2$ (et non seulement sur $\overline{B_\infty((0, 0), r)}$).

3. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, puisque polynomiale.

Remarquer que $\mathbf{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$.

Soit (x, y) un point de $\mathbf{R}^2$ en lequel f admet un extremum local. Alors :

$$\nabla f(x, y) = (4(x^3 - y), 4(y^3 - x)) = (0, 0)$$

On en déduit que $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Comme la trace et le déterminant de :

$$H_f(1, 1) = H_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

sont strictement positifs, $f(1, 1) = f(-1, -1) = -2$ est un minimum local de la fonction f , atteint en les deux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

Comme :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres -4 et 4 , $H_f(0, 0) \notin \mathcal{S}^+(\mathbf{R})$ et $-H_f(0, 0) \notin \mathcal{S}^+(\mathbf{R})$. La fonction f n'atteint donc aucun extremum local en $(0, 0)$.

Comme nous savons que f possède un minimum global et que le seul minimum local de f est -2 , le nombre -2 est le minimum global de f . Il est atteint en les seuls points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Elle ne possède aucun autre minimum local, ni aucun maximum local.

Remarque. — On peut démontrer que f possède -2 comme minimum global d'une manière plus élémentaire. En effet, si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors :

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

d'où :

$$f(x, y) \geq x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 - 2 \geq -2 = f(1, 1) = f(-1, -1)$$

Indication(s) pour l'exercice 4

1. On calcule, pour tout $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$;

$$f(a, b, c) = \frac{2a^2}{5} + \frac{2b^2}{3} + 2c^2 + \frac{4ac}{3} - \frac{4b}{5} + \frac{2}{7}$$

Ainsi, $f(a, 0, 0) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$

2. La fonction f est minorée par 0, donc $\inf \{f(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathbf{R}^3\}$ est un nombre réel bien défini.
Si nous munissons $\mathbf{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \int_{-1}^1 P(t) Q(t) \, dt \end{array} \right.$$

et notons :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ P & \longmapsto \sqrt{\int_{-1}^1 P(t)^2 \, dt} \end{array} \right.$$

la norme associée, alors :

$$\inf \{f(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathbf{R}^3\} = \inf \left\{ \|X^3 - P\|^2 : P \in \mathbf{R}_2[X] \right\} =: d(X^3, \mathbf{R}_2[X])^2$$

Si nous notons $a_0 X^2 + b_0 X + c_0$ le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbf{R}_2[X]$, alors nous savons que la fonction la fonction f admet pour minimum $f(a_0, b_0, c_0)$ et que ce dernier est atteint en l'unique point (a_0, b_0, c_0) .

3. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^3$.

Remarquer que $\mathbf{R}^3$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^3$.

Soit (a, b, c) un point de $\mathbf{R}^3$ en lequel f admet un extremum local. Alors :

$$\nabla f(a, b, c) = \left(\frac{4a}{5} + \frac{4c}{3}, \frac{4b}{3} - \frac{4}{5}, 4c + \frac{4a}{3} \right) = (0, 0, 0)$$

On en déduit que $(a, b, c) = \left(0, \frac{3}{5}, 0\right)$. Nous savons que f possède un minimum global atteint en un unique point et que $\left(0, \frac{3}{5}, 0\right)$ est le seul candidat. Ainsi $f\left(0, \frac{3}{5}, 0\right) = \frac{8}{175}$ est le minimum global de f sur $\mathbf{R}^3$, atteint en l'unique point $\left(0, \frac{3}{5}, 0\right)$. Elle ne possède aucun autre minimum local, ni aucun maximum local.

Remarque. — D'après notre étude, le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbf{R}_2[X]$ est $\frac{3}{5}X$ et $d(X^3, \mathbf{R}_2[X]) = \frac{2\sqrt{14}}{35}$. Ces résultats auraient également pu être obtenus en calculant une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$, en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$, par exemple.

Indication(s) pour l'exercice 5

1. La fonction φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$, strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

La fonction φ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, avec pour dérivée $t \mapsto \ln(t) + 1$, qui est une fonction croissante.

2. D'après la question 1, pour tout $t \in]0, a]$, $\varphi(t) \in \left[-\frac{1}{e}, \max\{0, \varphi(a)\}\right]$.

Comme $\Sigma \subset]0, a]^n$:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \in \left[-\frac{n}{e}, \max\{0, n\varphi(a)\}\right]$$

3. La partie Σ de $\mathbf{R}^n$ n'est pas compacte car non fermée dans $\mathbf{R}^n$. En effet, $\left(\frac{a}{k}, \frac{a}{n-1} - \frac{a}{k}, \frac{a}{n-1}, \dots, \frac{a}{n-1}\right)_{k \geq n}$ est une suite de points de Σ qui converge vers $\left(0, \frac{a}{n-1}, \frac{a}{n-1}, \dots, \frac{a}{n-1}\right) \notin \Sigma$.

4. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$. L'inégalité de Jensen pour la fonction convexe φ , appliquée aux n points $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$, avec comme poids $\frac{1}{n} \geq 0, \dots, \frac{1}{n} \geq 0$ de somme 1, livre :

$$\frac{a}{n} \ln\left(\frac{a}{n}\right) = \varphi\left(\frac{a}{n}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(x_i)}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \ln(x_i)}{n} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{n}$$

5. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$. Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La fonction :

$$\left| \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = x \ln(x) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \ln(x_j) \end{array} \right.$$

est dérivable en x_i , avec comme $\ln(x_i) + 1$ comme nombre dérivée en x_i .

La fonction f admet donc des dérivées partielles suivant toutes les variables, en tout point de $]0, +\infty[^n$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on vérifie que la fonction :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \ln(x_i) + 1 \end{array}$$

est continue (par exemple à l'aide du critère séquentiel de continuité). D'après le critère $\mathcal{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[^n$.

6. La fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ll}]0, +\infty[^n & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i - a \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ (affine) et $\Sigma = g^{-1}(\{0\})$. De plus :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n \quad \nabla g(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1) \neq 0$$

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un point de Σ en lequel la fonction $f|_{\Sigma}$ atteint un extremum local. D'après le théorème des extrema liés (multiplicateurs de Lagrange), il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \ln(x_1) + 1 & = & \lambda \\ & \vdots & \\ \ln(x_n) + 1 & = & \lambda \end{cases}$$

Nous en déduisons que $x_1 = \dots = x_n$, puis $(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right)$.

Le point $\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right)$ est le seul point en lequel la fonction $f|_{\Sigma}$ peut atteindre un extremum local, d'après ce qui précède. Comme :

$$f\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{a}{n} \ln\left(\frac{a}{n}\right) = a \ln\left(\frac{a}{n}\right)$$

et $a \ln\left(\frac{a}{n}\right)$ est un minorant de la fonction $f|_{\Sigma}$, la fonction $f|_{\Sigma}$ possède $a \ln\left(\frac{a}{n}\right)$ comme minimum global. Ce dernier est atteint dans l'unique point $\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right)$. La fonction $f|_{\Sigma}$ n'admet aucun autre minimum local, ni aucun maximum local.

Remarque. — D'après notre étude, pour tout $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$:

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^{x_1 + \dots + x_n} \leq x_1^{x_1} \dots x_n^{x_n}$$

De plus, en remplaçant la fonction f de l'énoncé par la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ll}]0, +\infty[^n & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \end{array} \right.$$

on peut établir, mutatis mutandis, que, pour tout $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad [\text{inégalité arithmético-géométrique}]$$

Un corrigé de l'exercice 6

1. La fonction f est continue puisque, pour tout $(C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^n$:

$$f(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n [C_i]_{\sigma(i),1}$$

est polynomiale en les coefficients des vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$. La sphère unité S de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est compacte, car fermée et bornée dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension finie. Comme la partie S^n de l'espace produit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^n$ est un produit fini de compacts, S^n est compact. Le théorème des bornes atteintes livre alors :

$$\exists (C_1, \dots, C_n) \in S^n \quad \forall (X_1, \dots, X_n) \in S^n \quad f(X_1, \dots, X_n) \leq f(C_1, \dots, C_n)$$

Si $(E_1, \dots, E_n)$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, alors $(E_1, \dots, E_n) \in S^n$ et :

$$1 = \det(I_n) = f(E_1, \dots, E_n) \leq f(C_1, \dots, C_n)$$

Le maximum $f(C_1, \dots, C_n)$ de la restriction de f à S^n est donc strictement positif.

2. Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et considérons l'application :

$$f_i \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ X & \longmapsto & f(C_1, \dots, C_{i-1}, X, C_{i+1}, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_{i-1}, X, C_{i+1}, \dots, C_n) \end{array} \right.$$

L'application f_i est de classe $\mathcal{C}^1$, puisque linéaire. De plus :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad df_i(X) \cdot H = f_i(H) = \det(C_1, \dots, C_{i-1}, H, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

La fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ X & \longmapsto & \langle X, X \rangle - 1 \end{array} \right.$$

a S pour ligne de niveau 0, i.e. $S = g^{-1}(\{0\})$. De plus, l'application $g = \langle \text{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}, \text{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire et $\text{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On calcule :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad dg(X) \cdot H = 2 \langle X, H \rangle$$

Ainsi, pour tout $X \in S$, $dg(X) \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \mathbf{R})}$.

Comme la restriction de la fonction f à S^n atteint son maximum en $(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, C_n)$:

$$\forall X \in S \quad f_i(X) = f(C_1, \dots, C_{i-1}, X, C_{i+1}, \dots, C_n) \leq f(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = f_i(C_i)$$

La restriction de la fonction f_i à S possède donc un maximum, atteint au point C_i .

D'après le théorème des extrema liés (multiplicateurs de Lagrange), il existe $\lambda_i \in \mathbf{R}$ tel que :

$$df_i(C_i) = \lambda_i dg(C_i)$$

d'où :

$$\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \det(C_1, \dots, C_{i-1}, H, C_{i+1}, \dots, C_n) = 2\lambda_i \langle C_i, H \rangle \quad (1)$$

En spécialisant H à C_i dans (1), il vient :

$$\underbrace{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n)}_{\text{maximum strictement positif de } f|_{S^n}} = 2\lambda_i \langle C_i, C_i \rangle = 2\lambda_i$$

puis $\lambda_i > 0$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$. En spécialisant H à C_j dans (1), il vient :

$$\underbrace{2\lambda_i}_{\neq 0} \langle C_i, C_j \rangle = \underbrace{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n)}_{\text{deux des colonnes } C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n \text{ sont égales}} = 0$$

puis $\langle C_i, C_j \rangle = 0$.

3. D'après la question précédente, si $(C_1, \dots, C_n)$ est un point de S^n en lequel la restriction de la fonction f à S^n atteint son maximum, alors $(C_1, \dots, C_n) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et donc $f(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_n) \in \{-1, 1\}$. D'après la question 1, $f(C_1, \dots, C_n) > 0$, d'où $f(C_1, \dots, C_n) = 1$. Nous en déduisons :

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in S^n \quad f(X_1, \dots, X_n) \leq 1 \quad (2)$$

Si $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, alors :

$$|\det(X_1, \dots, X_n)| = 0 \leq \prod_{k=1}^n \|X_k\|$$

Considérons à présent $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Alors chacun des vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_n$ est non nul, donc :

$$\left(\frac{X_1}{\|X_1\|}, \dots, \frac{X_n}{\|X_n\|} \right)$$

est un vecteur bien défini de S^n . D'après (2) :

$$\det \left(\frac{X_1}{\|X_1\|}, \dots, \frac{X_n}{\|X_n\|} \right) \leq 1$$

Comme le déterminant est linéaire en chacune des colonnes, nous en déduisons :

$$\det(X_1, \dots, X_n) \leq \prod_{k=1}^n \|X_k\| \quad (3)$$

Le résultat (3) établi pour $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vaut également pour $(-X_1, X_2, \dots, X_n)$, ainsi :

$$-\det(X_1, \dots, X_n) = \det(-X_1, \dots, X_n) \leq \| -X_1 \| \|X_2\| \dots \|X_n\| = \prod_{k=1}^n \|X_k\| \quad (4)$$

De (3) et (4), on déduit :

$$|\det(X_1, \dots, X_n)| = \max \{ \det(X_1, \dots, X_n), -\det(X_1, \dots, X_n) \} \leq \prod_{k=1}^n \|X_k\|$$