TD – Algèbre linéaire de MP2I

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps (commutatif).

1. Exercices d'application du cours

Exercice 1. — *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *?*

$$F_1 = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ : \ u \text{ converge vers } 1\right\} \qquad F_2 = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ : \ u \text{ est bornée}\right\} \qquad F_3 = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ : \ u^2 \text{ converge}\right\}$$

Exercice 2. — *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels* $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ *?*

$$F_1 = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ : \ f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\right\} \qquad F_2 = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ : \ f \text{ est uniformément continue}\right\}$$
$$F_3 = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ : \ f \text{ est majorée}\right\} \qquad F_4 = \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ : \ f \text{ est lipschitzienne}\right\}$$

Exercice 3. — *L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Si* F, G, H *sont trois sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *tels que* $F + G = F + H$*, alors* $G = H$.

Exercice 4. — *Soient* F, G, H *trois sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E*. Démontrer que :*

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$$

A-t-on nécessairement égalité ?

Exercice 5. — *Les familles suivantes de vecteurs de* $\mathbf{R}^3$ *sont elles libres ? génératrices de* $\mathbf{R}^3$ *?*

$$\underline{e} = (e_1 = (1,0,1)\,,\ e_2 = (1,1,1)\,,\ e_3 = (1,0,0)) \qquad \underline{f} = (f_1 = (1,1,0)\,,\ f_2 = (1,0,1)\,,\ f_3 = (2,0,1))$$
$$\underline{g} = (g_1 = (-1,0,1)\,,\ g_2 = (1,-1,1)\,,\ g_3 = (1,0,0)\,,\ g_4 = (2,3,4))$$

Exercice 6. — *Soient* f_1, f_2, f_3 *les trois fonctions définies par :*

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x) \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos^3(x) \end{array} \right.$$

La famille (f_1, f_2, f_3) *est-elle libre ?*

Exercice 7. — *Soient* n *un entier supérieur ou égal à 2 et* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une famille libre de vecteurs d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E*. Posons :*

$$f_1 = e_1 \quad , \quad f_2 = e_1 + e_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad f_n = e_1 + \ldots + e_n$$

La famille $(f_1, \ldots, f_n)$ *est-elle libre ?*

Exercice 8. — *Soient* E, F *deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels,* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une famille libre de vecteurs de* E.

1. *Démontrer que si* f *est injective, alors la famille* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *est libre.*
2. *La réciproque est-elle vraie ?*

Exercice 9 (CCINP). — *Soit* $n \in \mathbf{N}^*$*. Notons* $\mathcal{D}_n$ *l'ensemble des matrices diagonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. *Démontrer que* $\mathcal{D}_n$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

2. *Soit $D \in \mathcal{D}_n$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Démontrer que la famille $\left(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1}\right)$ est une base de $\mathcal{D}_n$.*

Exercice 10. — *Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Nous définissons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction e_k par :*

$$e_k \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{a_k}. \end{array} \right.$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est-elle libre ?

Exercice 11. — *Déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants.*

$$F_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x+y+z+t = 0\right\} \qquad F_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ \left\{ \begin{array}{r} x+y+z+t = 0 \\ x-y+z-t = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$F_3 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ \left\{ \begin{array}{r} x+y+z+t = 0 \\ x-y+z-t = 0 \\ x+t = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Exercice 12. — *Soient $E_1 = \mathrm{Vect}\,(v_1 = (1,-1,0,1), v_2 = (0,2,1,0))$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\,(w_1 = (0,6,-1,4), w_2 = (3,3,1,5))$.*

1. *Caractériser $E_1 \cap E_2$.*
2. *Donner une base de $E_1 + E_2$.*
3. *Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.*

Exercice 13. — *Notons P (respectivement I) l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ paires (respectivement impaires). Démontrer que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = P \oplus I$.*

Exercice 14. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ notons :*

$$F_k := \left\{P \in \mathbf{R}_n[X] \ : \ \forall \ell \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}, \ P(\ell) = 0\right\}.$$

Démontrer que $\mathbf{R}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{n} F_k$.

Exercice 15. — *Soient $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ deux familles de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E tels que :*

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \qquad E_i \subset F_i \qquad \text{et} \qquad \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = F_i$.

Exercice 16. — *Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.*

1. *Démontrer que $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(E_i)$.*
2. *Supposons que f est injective et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(E_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} f(E_i)$.*

Exercice 17 (CCINP). — *Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E tels que :*

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \qquad \text{et} \qquad F' \subset G$$

Démontrer que $F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$.

Exercice 18. — *Caractériser les sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{R}^4$ *suivants à l'aide d'une équation cartésienne.*

$$F_1 = \mathrm{Vect}\,((1,1,1,1)) \qquad F_2 = \mathrm{Vect}\,((1,1,1,1),(1,1,1,-1)) \qquad F_3 = \mathrm{Vect}\,((1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,0,0,1))$$

On pourra munir $\mathbf{R}^4$ *de son produit scalaire usuel et prendre appui sur l'identité* $F = \left(F^\perp\right)^\perp$, *valide pour tout sous-espace vectoriel* F *de* $\mathbf{R}^4$.

Exercice 19. — *Soient* A *et* B *deux parties d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E. *Démontrer que :*

$$\mathrm{Vect}\,(A) + \mathrm{Vect}\,(B) = \mathrm{Vect}\,(A \cup B)$$

et en déduire une nouvelle démonstration d'un résultat du cours.

Exercice 20. — *Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{R}^4$ *suivants :*

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x+y+z+t=0\right\} \qquad G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x+y+z+t = x-y+2z-3t = 0\right\}$$

Exercice 21. — *Justifier que* $\mathbf{C}$ *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension 2.*

Exercice 22. — *Soit* E *un* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$. *Démontrer que* E *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* $2n$.

Exercice 23. — *Démontrer que le* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}[X]$ *n'est pas de dimension finie.*

Exercice 24 (CCINP). — *Soient* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E.

1. *Démontrer que, pour tout* $i \in [\![2,n]\!]$, *la famille* $(e_1 + e_i, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ *est une base de* E.
2. *Déterminer les endomorphismes de* E *dont la matrice est diagonale dans toute base de* E.

Exercice 25. — *Soient* E, F *deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies respectives* n *et* m, $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E *et* $(f_1, \ldots, f_m)$ *une base de* F.

1. *Soit* $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$. *Justifier qu'il existe une unique application linéaire* $u_{i,j} \in \mathcal{L}\,(E,F)$ *telle que :*

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad u_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k}\, f_j.$$

2. *Démontrer que la famille* $(u_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,m]\!]}$ *est une base de* $\mathcal{L}\,(E,F)$. *Qu'en déduire pour* $\mathcal{L}\,(E,F)$ *?*

Exercice 26 (Banque CCINP n°90). — *Soient* a_1, a_2, a_3 *trois scalaires distincts donnés de* $\mathbf{K}$.

1. *Démontrer que :*

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. *On note* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbf{K}^3$ *et on pose, pour tout* $k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) *Justifier que* (L_1, L_2, L_3) *est une base de* $\mathbf{K}_2[X]$.
   (b) *Exprimer les polynômes* L_1, L_2 *et* L_3 *en fonction de* a_1, a_2 *et* a_3.
3. *Soit* $P \in \mathbf{K}_2[X]$. *Déterminer les coordonnées de* P *dans la base* (L_1, L_2, L_3).
4. *Application : on se place dans* $\mathbf{R}^2$ *muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points* $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$. *Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points* A, B *et* C.

Exercice 27 (CCINP). — *Supposons* E *de dimension finie* $n \geqslant 1$ *sur* $\mathbf{K}$.

1. *Préciser l'élément neutre de* $\mathcal{L}\,(E)$ *pour la loi* $\circ$ *et l'élément neutre de* $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ *pour la loi* $\times$.
2. *Étant donnée une base* $\mathcal{B}$ *de* E, *notons* φ *l'application définie par :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}\,(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

(a) *Démontrer que* φ *est un isomorphisme d'anneaux de* $\mathcal{L}(E)$ *vers* $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$.

(b) *Démontrer que pour tout* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et tout* $p \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^p$.

Exercice 28. — *Soient* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel. et* φ *une forme linéaire non nulle sur* E*. Démontrer qu'il existe* $a \in E$ *tel que* $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

Exercice 29 (Banque CCINP n°71). — *Soit* P *le plan d'équation* $x+y+z=0$ *et* D *la droite d'équation* $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. *Vérifier que* $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.
2. *Soit* p *la projection vectorielle de* $\mathbf{R}^3$ *sur* P *parallèlement à* D*. Soit* $u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$*. Déterminer* $p(u)$ *et donner la matrice de* p *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$.
3. *Déterminer une base de* $\mathbf{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* p *est diagonale.*

Exercice 30. — *Soient* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel et* p *un projecteur de* E.

1. *Démontrer que* $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
2. *Réciproquement, si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *vérifie* $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$*,* f *est-il un projecteur de* E *?*

Exercice 31. — *Soient* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel et* s *une symétrie de* E.

1. *Démontrer que* $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
2. *Réciproquement, si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *vérifie* $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$*,* u *est-il une symétrie de* E *?*

Exercice 32 (Banque CCINP n°60). — *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ *défini par :*

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \quad f(M) = AM$$

1. *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker}(f)$.
2. f *est-il surjectif ?*
3. *Déterminer une base de* $\mathrm{Im}(f)$.
4. *A-t-on* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ *?*

Exercice 33 (CCINP). — *Soient* $n \in \mathbf{N}^*$*,* $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$*,* $\lambda, \mu \in \mathbf{C}^*$ *tels que : :*

$$\lambda \neq \mu \quad , \quad I_n = A + B \quad , \quad M = \lambda A + \mu B \quad , \quad M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$$

1. *Calculer* $M^2 - (\lambda+\mu)M + \lambda\mu I_n$*. En déduire que* M *est inversible, puis exprimer* M^{-1}.
2. *Démontrer que* A *et* B *sont des projecteurs.*

Exercice 34. — *Soient* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u^2 - 4u + 3\,\mathrm{id}_E = 0$.

1. *Démontrer que* u *est inversible est exprimer* u^{-1} *en fonction de* u.
2. *Démontrer que* $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}_E)$.

Exercice 35 (Banque CCINP n°64). — *Soit* f *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie* n.

1. *Démontrer que :*
$$E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \implies \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$$
2. (a) *Démontrer que :*
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$$
   (b) *Démontrer que :*
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right) \implies E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$$

Exercice 36. — *Soient* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel,* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent de nilindice* p.

1. *Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $\left(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\right)$ soit libre.*
2. *Si maintenant on suppose E de dimension finie, comparer l'indice de nilpotence p de f et de la dimension de f.*

Exercice 37. — *Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente de nilindice p. Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.*

Exercice 38. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. L'identité $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g \circ f)$ est-elle nécessairement vraie ?*

Exercice 39 (CCINP). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que :*

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

Exercice 40. — *Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Déterminer le rang de f.*

Exercice 41. — *Calculer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.*

Exercice 42. — *Une matrice de rang r est-elle nécessairement semblable à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?*

Exercice 43. — *Soient un entier $n \geqslant 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $(P, Q) \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})^2$ vérifiant $B = PAQ$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Existe-t-il nécessairement une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$?*

Exercice 44. — *Soient un entier $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^2 = A$. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que A soit semblable à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Exercice 45. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ et deux endomorphismes f, g de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Démontrer les identités suivantes.*

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \ker f \qquad , \qquad \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \qquad , \qquad E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$$

Exercice 46 (CCINP). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie) et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$. Démontrer que :*

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f) \qquad , \qquad \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \qquad , \qquad E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$$

Exercice 47. — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $(A, B) \in \mathcal{T}_n(\mathbf{K})^2$, où $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ qui sont triangulaires supérieures. Démontrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $[AB]_{i,i} = [A]_{i,i} \times [B]_{i,i}$.*

Exercice 48. — *Soit un entier $n \geqslant 2$.*

1. *Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $C_{i,j} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ : \ A\, E_{i,j} = E_{i,j}\, A\}$.*
2. *En déduire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Exercice 49. — *Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 14 & 7 & -4 \\ 7 & -21 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse le cas échéant.*

Exercice 50. — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer que A est inversible si et seulement si, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nulle, $AX \neq 0$.*

Exercice 51 (CCINP). — *Pour tout couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, notons $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et posons :*

$$F = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ : \ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

1. *Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ?*
2. *Posons :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & M\left(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\right) \end{array} \right.$$

   (a) *Démontrer que φ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux.*
   (b) *Pour tout couple $(a,b) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})^2$ et tout entier naturel n, calculer $M(a,b)^n$.*

Exercice 52. — *Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Exercice 53. — *Soit un entier $n \geqslant 2$. Démontrer que :*

$$\forall\, (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$$

Exercice 54 (CCINP). — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Résoudre, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'équation $X = \mathrm{Tr}\,(X)\ A + B$.*

Exercice 55 (CCINP). — *Soit un entier $n \geqslant 2$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, notons f_A la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie par :*

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad f_A(M) = \mathrm{tr}\,(AM)$$

1. *Démontrer que l'application :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \left(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\right)^* \\ A & \longmapsto & f_A \end{array} \right.$$

   est linéaire et injective.
2. *Démontrer que, pour tout forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\varphi = f_A$.*
3. *Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ telle que :*

$$\forall\, (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad \varphi(MN) = \varphi(NM)$$

   Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f = \lambda\, \mathrm{tr}$.

Exercice 56. — *Démontrer que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $AB^\top = B^\top A^\top$.*

Exercice 57 (CCINP). — *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ tel que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\}$.*

---

2. Exercices de difficulté moyenne

Exercice 58. — *Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Posons :*

$$f_1 = e_1 + e_2 \quad , \quad f_2 = e_2 + e_3 \quad , \quad \ldots \quad , \quad f_{n-1} = e_{n-1} + e_n \quad , \quad f_n = e_n + e_1$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ soit libre.

Exercice 59. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs non nuls de E. Supposons qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distincts tels que :*

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!] \quad f(x_i) = \lambda_i\, x_i$$

Démontrer que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Exercice 60. — *Posons $P_0 := 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n := \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(X-i)$. Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$.*

Exercice 61. — *Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, notons e_n et c_n les fonctions définies par :*

$$e_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^{inx} \end{array} \right. \qquad\qquad c_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \cos(nx) \end{array} \right.$$

Démontrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est libre dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{R}}$, puis que la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Exercice 62. — *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons f_k la fonction définie par :*

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos^k(x) \end{array} \right.$$

La famille $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

Exercice 63. — *Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non constant. Démontrer que $F = \{AP \ : \ P \in K[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{K}[X]$.*

Exercice 64. — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts.*

1. *Démontrer que $F = \left\{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ : \ f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n) = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.*
2. *Donner un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.*

Exercice 65. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe p sous-espaces vectoriels non triviaux $E_1, \ldots, E_p$ et p scalaires deux-à-deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :*

$$\forall\, i\ in [\![1,p]\!] \quad \forall\, x \in E_i \quad f(x) = \lambda_i x$$

Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Exercice 66 (trigonalisation d'un endomorphisme nilpotent). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de nilindice $p \in \mathbf{N}^*$.*

1. *Démontrer que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k tel que* $\mathrm{Ker}\left(u^k\right) = \mathrm{Ker}\left(u^{k-1}\right) \oplus F_k$.
2. *Démontrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$*
3. *Démontrer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe de la question 2 est triangulaire supérieure. Que valent les coefficients diagonaux ?*

Exercice 67. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ soit liée. Démontrer que f est une homothétie.*

Exercice 68. — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E. Démontrer que φ et ψ sont colinéaires si et seulement si elles ont même noyau.*

2. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *et* ψ *des formes linéaires sur* E*. Démontrer que :*

$$\psi \in \mathrm{Vect}\left(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\left(\varphi_k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(\psi\right).$$

Exercice 69. — *Soient* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$*,* F *un sous-espace vectoriel de* E *distinct de* E*.*

1. *Démontrer que* F *peut s'obtenir comme une intersection finie d'hyperplans.*
2. *Quel est le nombre minimal d'hyperplans nécessaire pour obtenir* F *?*

Exercice 70. — *Soient* F_1*,* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E*.*

1. *Supposons que* F_1 *et* F_2 *possède un supplémentaire commun. Démontrer qu'ils sont isomorphes.*
2. *Si* F_1 *et* F_2 *sont isomorphes, ont-ils nécessairement un supplémentaire commun ?*

Exercice 71. — *Soient* $a_0, \dots, a_n$ *des réels deux-à-deux distincts. Démontrer qu'il existe des réels* $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ *tels que :*

$$\forall\, P \in \mathbf{R}_n[X] \qquad \int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, P\left(a_k\right)$$

Exercice 72. — *Soient* E *un* $\mathbf{R}$*-espace de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme tel que* $f^2 = -\,\mathrm{id}_E$*.*

1. *Démontrer que pour tout vecteur* a *non nul, la famille* $(a, f(a))$ *est libre.*
2. *Démontrer qu'il existe* $p \in \mathbf{N}^*$ *et* p *vecteurs* $a_1, \dots, a_p$ *tels que*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\left(\{a_i, f(a_i)\}\right)$$

3. *Démontrer que* E *est de dimension paire et trouver une base de* E *dans laquelle la matrice de* f *est « simple ».*

Exercice 73. — *Soient un entier* $n \geqslant 2$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*. Comparer le rang de* A *et le rang de sa comatrice.*

Exercice 74. — *Soient* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$ *et* $u \in \mathcal{L}\left(E\right)$*. Déterminer le rang de l'application linéaire :*

$$\varphi \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathcal{L}\left(E\right) & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(E\right) \\ v & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$$

Exercice 75. — *Ici,* $\mathbf{K}$ *désigne un sous-corps de* $\mathbf{C}$*. Soit* D *l'opérateur de dérivation sur* $\mathbf{K}[X]$ *:*

$$D \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ *stables par* D*.*

Exercice 76. — *Soient* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel,* $u \in \mathcal{L}\left(E\right)$*. On suppose qu'il existe un polynôme* $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ *tel que :*

$$P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k\, u^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \qquad \textit{et} \qquad P'(0) \neq 0.$$

Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(u)$ *et* $\mathrm{Im}\,(u)$ *sont en somme directe.*

Exercice 77 (matrice diagonalement dominante). — *Soient un entier* $n \geqslant 2$ *et* $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ *une matrice diagonalement dominante, i.e. telle que :*

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$$

Démontrer que A est inversible.

Exercice 78. — *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$.*

1. *Démontrer que* $\det(A)$ *et* $\det(B)$ *sont des entiers relatifs.*
2. *Supposons* $\det(A)$ *et* $\det(B)$ *premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ telles que $UA + VB = I_n$.*

Exercice 79. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère les deux propriétés (P1) et (P2) définies par :*

(P1) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonale ;*

(P2) tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par u.

Démontrer que les propriétés (P1) et (P2) sont équivalentes.

---

3. Exercices difficiles

Exercice 80. — *Soient $n \in \mathbf{N}$, $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré n et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des complexes deux à deux distincts. On définit, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = P(X + x_k)$. Prouver que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.*

Exercice 81. — *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un nombre algébrique, i.e. racine d'un polynôme non nul, à coefficients rationnels. Posons :*

$$\mathbf{Q}[\alpha] := \mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}}\left(\left\{\alpha^k \;:\; k \in \mathbf{N}\right\}\right)$$

1. *Démontrer que l'entier $n := \min\{\deg(P) \;:\; P \in \mathbf{Q}[X] \setminus \{0\} \text{ et } P(\alpha) = 0\}$ est bien défini.*
2. *Démontrer que $\left(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\right)$ est une base du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}[\alpha]$.*
3. *Démontrer que $\mathbf{Q}[\alpha]$ est un corps.*

Exercice 82 (X). — *Notons $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que la famille $(\ln(p_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.*

Exercice 83 (ÉNS). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(E)$. Posons :*

$$E^G = \{x \in E \;:\; \text{pour tout } g \in G,\ g(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes par tous les éléments de G. Démontrer que :

$$\dim\left(E^G\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}\,(g)$$

Exercice 84 (lemme des cinq). — *On considère le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & E_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & E_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & E_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & E_5 \arrow[d, "h_5"] \\
F_1 \arrow[r, "g_1"] & F_2 \arrow[r, "g_2"] & F_3 \arrow[r, "g_3"] & F_4 \arrow[r, "g_4"] & F_5
\end{tikzcd}$$

formé de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et d'applications linéaires. On suppose que le diagramme est commutatif, i.e. :

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1 \quad ; \quad h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2 \quad ; \quad h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3 \quad ; \quad h_5 \circ f_4 = g_4 \circ h_4$$

et que les deux lignes sont exactes, i.e. :

$$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Im}(f_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Im}(f_3)$$

$$\mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(g_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_3) = \mathrm{Im}(g_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_4) = \mathrm{Im}(g_3).$$

Montrer que :

$$h_1, h_2, h_4, h_5 \text{ isomorphismes} \quad \Longrightarrow \quad h_3 \text{ isomorphisme.}$$

Exercice 85. — *Soient $a_0, \ldots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts. Notons $f_0, \ldots, f_n$ les formes linéaires sur $\mathbf{K}_n[X]$ définies par :*

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X] \quad f_i(P) = P(a_i)$$

Démontrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base de $(\mathbf{K}_n[X])^*$ et trouver sa base antéduale.

Exercice 86 (ÉNS). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ et n endomorphismes nilpotents $u_1, \ldots, u_n$ de E commutant deux à deux. Démontrer que $u_1 \circ \ldots \circ u_n = 0$.*

Exercice 87 (X). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $m \in \mathbf{N}^*$ et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Démmontrer que $\mathrm{rg}\,(g) \leqslant \mathrm{rg}\,(f)$ si et seulement s'il existe $h \in \mathbf{GL}(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$.*

Exercice 88 (X). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que les suites $\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ sont d'abord strictement monotones pour l'inclusion, puis constantes à partir d'un certain rang $p \leqslant n$.*
2. *Démontrer que la suite $\left(\dim \mathrm{Ker}\left(u^{k+1}\right) - \dim \mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est décroissante.*
3. *Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u^p) \oplus \mathrm{Im}\,(u^p)$.*
4. *En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où N est une matrice carrée nilpotente et A une matrice carrée inversible.*

Exercice 89 (X). — *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et une application $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que $f\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}\right) = 0$, $f\left(I_n\right) = 1$ et :*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(A) \neq 0$ si et seulement si $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 90 (X). — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de trace nulle.*

1. *Montrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.*
2. *Montrer qu'il existe deux matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A = BC - CB$.*

Exercice 91. — *Soit un entier $n \geqslant 2$. Démontrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient une matrice inversible.*
