

Devoir maison n°4

pour le lundi 4 novembre

1. Topologie matricielle et théorème de Cayley-Hamilton	1
1.1. Topologie des \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie	1
1.2. Polynômes de matrices	2
1.3. Un résultat de convergence pour une suite de polynômes de matrices	2
1.4. Continuité de l'application $\chi: \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}_n[X]$	3
1.5. Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$	3
1.6. Théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$	4
1.7. Résultant d'un couple de polynômes	4
1.8. Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$	4
1.9. Adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$	5
1.10. Propriétés topologiques l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$	5
2. Théorème de Riesz sur la boule unité fermée d'un \mathbf{K} -espace vectoriel	6

Préambule. — Les élèves de MPI résolvent les questions Q1–Q37, ceux de MPI* toutes les questions. Il s'agit d'un TRAVAIL PERSONNEL, à réaliser sans l'aide de camarade ou d'internet. Vous attacherez la plus grande importance à la CLARTÉ, à la PRÉCISION et à la CONCISION de la RÉDACTION. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

1. Topologie matricielle et théorème de Cayley-Hamilton

Notation. — La lettre \mathbf{K} désigne le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1.1. Topologie des \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie

Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie, (e_1, \dots, e_n) une base de E et

$$N_\infty \left| \begin{array}{l} E \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_+ \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \longmapsto \quad \max \{|x_i| : i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \end{array} \right.$$

Dans l'exercice 9 de la feuille d'exercices « Espaces vectoriels normés 2 », nous avons démontré le

Théorème A. — Soit N une norme sur le \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad N(x) \leq \alpha N_\infty(x) \quad \text{et} \quad N_\infty(x) \leq \beta N(x)$$

Q1. — Soient N_1, N_2 deux normes sur E , $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E et x un vecteur de E . Démontrer l'équivalence

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_1} x \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_2} x$$

D'après la question 1, pour étudier la convergence d'une suite de vecteurs de E , on peut placer sur E la norme que l'on souhaite. Cette souplesse nous permet de considérer une norme idoine pour la problématique considérée. En outre, la propriété établie à la question 1 a pour conséquence que les concepts suivants ne dépendent pas de la norme dont le \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie E est équipé.



- partie fermée (cf. caractérisation séquentielle) ;
- partie ouverte (complémentaire d'une partie fermée) ;
- adhérence d'une partie (définie par une propriété de minimalité mettant en jeu des parties fermées) ;
- intérieur d'une partie (défini par une propriété de minimalité mettant en jeu des parties ouvertes) ;
- partie compacte (définie à l'aide de la propriété de Bolzano-Weierstraß).

Dans la question suivante, nous établissons que la notion de « partie bornée » ne dépend pas non plus du choix de la norme sur E .

Q2. — Soient N_1, N_2 deux normes sur E et A une partie de E . Démontrer que la partie A est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2 .

Q3. — En considérant la norme N_∞ sur le \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie E , démontrer le

Théorème B. — Soit A une partie fermée et bornée du \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Alors A est compacte.

Q4. — Soient F un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f: E \longrightarrow F$ une application. Soient $\|\cdot\|_E, N_E$ deux normes sur E et $\|\cdot\|_F, N_F$ deux normes sur F . Démontrer l'équivalence

$$f: (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F) \text{ est continue} \iff f: (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F) \text{ est continue}$$

💡 | Pour étudier la continuité de l'application $f: E \longrightarrow F$, on peut placer sur E et F les normes que l'on souhaite. Cette souplesse nous permet de considérer des normes idoines pour la problématique considérée.

Q5. — Soient F un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme N_F et $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire. Démontrer qu'il existe une constante réelle $k > 0$ telle que

$$\forall x \in E \quad N_F(f(x)) \leq k N_\infty(x)$$

et en déduire le

Théorème C. — Toute application linéaire du \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension finie vers le \mathbf{K} -espace vectoriel F de dimension finie est continue.

1.2. Polynômes de matrices

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ fixée. Pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, on définit la matrice $P(A)$ par

$$P(A) := \sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i A^i$$

Par exemple, si $P = X^3 - 5X + 2$, $P(A) = A^3 - 5A + 2I_n$.

Q6. — Démontrer que l'application

$$\text{Eval}_A \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ P \longmapsto P(A) := \sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i A^i \end{array} \right.$$

est linéaire.

Q7. — Démontrer qu'il existe un polynôme non nul P tel que $\deg(P) \leq n^2$ et $P(A) = 0$.

Q8. — Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

1.3. Un résultat de convergence pour une suite de polynômes de matrices

On équipe $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des normes

$$\|\cdot\|_\infty \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}_n[X] \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ Q \longmapsto \max\{|[Q]_i| : i \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \|\cdot\| \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ M \longmapsto \max\left\{\sum_{i=1}^n |[M]_{i,j}| : j \in \llbracket 1, n \rrbracket\right\} \end{array} \right.$$

Q9. — Démontrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Soient $(P_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbf{K}_n[X]$, $P \in \mathbf{K}_n[X]$, $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que

$$P_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{K}_n[X]} P \quad \text{et} \quad A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} A$$

et on se propose de démontrer

$$P_k(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} P(A) \tag{1}$$

Q10. — Démontrer que $\|P_k(A_k) - P(A_k)\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} 0$.

Q11. — Justifier que l'application

$$\text{Eval}_P \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & P(M) := \sum_{i=0}^n [P]_i M^i \end{array} \right.$$

est continue.

Q12. — En déduire le résultat (1).

1.4. Continuité de l'application $\chi: \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}_n[X]$

Soient $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} A$ et on se propose de démontrer

$$\chi_{A_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{K}_n[X]} \chi_A \tag{2}$$

Q13. — Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\widetilde{\chi_{A_k}}(\lambda) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{K}} \widetilde{\chi_A}(\lambda)$.

Q14. — Démontrer que l'application

$$N \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \longmapsto & \sum_{i=0}^n |\widetilde{P}(i)| \end{array} \right|$$

est une norme sur $\mathbf{K}_n[X]$.

Q15. — En déduire le résultat (2).

Q16. — Énoncer une conséquence pour l'application

$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right|$$

Q17. — En déduire que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application

$$\text{Coeff}_i \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ M & \longmapsto & [\chi_M]_i \end{array} \right|$$

est continue.

1.5. Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On définit la partie $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ par :

$$\mathcal{D}'_n(\mathbf{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) : M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{C}\}.$$

Q18. — Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Si tous les coefficients diagonaux de T sont égaux on pose $\mu = 1$ et si au moins deux des coefficients diagonaux de T sont distincts on pose

$$\mu = \min \{ |[T]_{i,i} - [T]_{j,j}| : (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ et } [T]_{i,i} \neq [T]_{j,j} \}$$

On introduit, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$T_k := T + \frac{\mu}{k} \text{diag} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $T_k \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ et que

$$T_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} T$$

Q19. — Soit $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que, pour tout $D' \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$, la matrice $P D' P^{-1}$ appartient à $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ et justifier que l'application

$$\text{Conj}_P \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & P A P^{-1} \end{array} \right.$$

est continue.

Q20. — Démontrer que la partie $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.

1.6. Théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Q21. — Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres complexes et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Démontrer que $\chi_D(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.

Q22. — Soit $A \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.

Q23. — En déduire le

Théorème (Cayley-Hamilton). — Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$.

1.7. Résultant d'un couple de polynômes

Soient A un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $p \geq 1$ et B un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $q \geq 1$.

Q24. — Démontrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucune racine complexe commune.

Q25. — Démontrer que l'application

$$\varphi_{A,B} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_{p+q-1}[X] \\ (P, Q) & \longmapsto & AP + QB \end{array} \right.$$

est linéaire.

Nous introduisons les bases \mathcal{B} de $\mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X]$ et \mathcal{C} de $\mathbf{C}_{p+q-1}[X]$ définies par

$$\mathcal{B} := ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{p-1})) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} := (1, X, \dots, X^{p+q-1})$$

Q26. — Expliciter la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi_{A,B})$ à l'aide des coefficients a_0, \dots, a_p de A et des coefficients b_0, \dots, b_q de B .

Le résultant du couple (A, B) de polynômes est le nombre complexe

$$\text{Res}(A, B) := \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi_{A,B}))$$

Q27. — Démontrer que les polynômes A et B ont une racine complexe commune si et seulement si $\text{Res}(A, B) = 0$.

Q28. — On introduit les deux parties

$$\Delta_n := \{P \in \mathbf{C}_n[X] : \deg(P) = n\} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_n := \{P \in \Delta_n : P \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbf{C}\}$$

de $\mathbf{C}_n[X]$. Démontrer que \mathcal{U}_n est un ouvert relatif de Δ_n .

1.8. Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Q29. — Démontrer que

$$\mathcal{O} := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) : \chi_M \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbf{C}\}$$

est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Q30. — En déduire l'inclusion $\mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}$.

Considérons une matrice $A \in \mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé à racines simples sur \mathbf{C} . Il existe donc un entier $r \geq 1$, des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distincts et des nombres entiers $m_1 \geq 2, m_2, \dots, m_r \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$\chi_A = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Q31. — En introduisant l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ canoniquement associé à A , démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$A = P \underbrace{\text{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_r I_{m_r})}_{=:D} P^{-1}$$

Q32. — Démontrer que, pour tout $\rho > 0$, la boule ouverte

$$B_\infty(D, \rho) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) : \|M - D\|_\infty < \rho\}$$

contient une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui n'est pas diagonalisable sur \mathbf{C} .

Q33. — En déduire que $A \notin \widehat{\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})}$.

Q34. — Conclure quant à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables sur \mathbf{C} .

1.9. Adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Q35. — Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, de degré n et unitaire. Démontrer que

$$P \text{ est scindé sur } \mathbf{R} \iff (\forall z \in \mathbf{C} \quad |\text{Im}(z)|^n \leq |P(z)|)$$

Q36. — En déduire que l'ensemble

$$\mathcal{T}'_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : M \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{R}\}.$$

est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q37. — Déterminer alors l'adhérence de la partie

$$\mathcal{D}'_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{R}\}.$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1.10. Propriétés topologiques l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

On note \mathcal{N} l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Q38. — Démontrer que \mathcal{N} est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Q39. — La partie \mathcal{N} de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est-elle compacte ?

Q40. — Déterminer l'intérieur de la partie \mathcal{N} de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Q41. — Démontrer que \mathcal{N} est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

2. Théorème de Riesz sur la boule unité fermée d'un \mathbf{K} -espace vectoriel

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On rappelle que la distance d'un vecteur x de E à une partie non vide A de E est définie par

$$d(x, A) := \inf \{\|x - a\| : a \in A\} \in \mathbf{R}_+$$

Q42. — Soit x un vecteur de E . Démontrer que

$$\exists x_F \in F \quad \|x - x_F\| = d(x, F) \quad [\text{la distance de } x \text{ à } F \text{ est atteinte}]$$

et discuter l'unicité de x_F .

Q43. — On suppose que $F \neq E$. Dédurre de la question 42 qu'il existe un vecteur u de E tel que

$$\|u\| = 1 \quad \text{et} \quad d(u, F) = 1$$

On suppose désormais que le \mathbf{K} -espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.

Q44. — Justifier qu'il existe une famille libre $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de E .

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n := \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$.

Q45. — Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que

$$(P1) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \|u_n\| = 1$$

$$(P2) \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad d(u_n, F_{n-1}) = 1$$

Q46. — En déduire que, pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $p \neq q$, $\|u_p - u_q\| \geq 1$.

Q47. — Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence.

Q48. — Démontrer enfin le

Théorème (Riesz). — *Un \mathbf{K} -espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*