Suites et séries de fonctions 2

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Continuité et double limite

Notation. — La lettre I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$.

1.1. Théorème de la double limite en un point de l'intervalle pour une suite de fonctions

Théorème 1. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ et un point $a \in I$. Si*

(H1) $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue en a*

alors

(C1) *f est continue en a*

(C2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$

L'hypothèse de convergence uniforme est importante dans le théorème 1. La seule convergence simple ne suffit pas. En effet, considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n définie par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $[0,1]$, où f est la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

mais

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) \quad \neq \quad \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

1.2. Théorème de la double limite en un point de l'intervalle pour une série de fonctions

Le théorème 1 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

Corollaire 2. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $a \in I$. Si*

(H1) *la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I*

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue en a*

Alors

(C1) *la fonction*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

est continue en a

(C2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)$

1.3. Limite uniforme d'une suite de fonctions continues

Corollaire 3. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})$. Si*

(H1) $f_n \xrightarrow[I]{CUK} f$

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I*

alors

(C) *f est continue sur I*

Exercice 4. — Démontrer que la suite de fonctions

$$\left(f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1+t^2+t^n\,e^{-t}} \end{array} \right. \right)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge simplement sur $\mathbf{R}_+$, mais ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}_+$.

1.4. Série uniformément convergente de fonctions continues

Le théorème 3 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

Corollaire 5. — *Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Si*

(H1) *la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I*

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I*

alors

(C) *la fonction*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

est continue sur I.

Exercice 6. — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2} \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 7. — Soit la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$$

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathcal{D}$.

Exercice 8. — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, e^{-nx}}{\sqrt{n}} \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

1.5. Théorème de la double limite en un point du bord de l'intervalle pour une suite de fonctions

Théorème 9. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ et a l'une des extrémités de I ($a = -\infty$ ou $a = +\infty$ est donc possible). Si*

(H1) $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n en a*

alors

(C1) *la suite numérique $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite ℓ*

(C2) *la fonction f admet une limite ℓ en a*

(C3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$

Ce théorème est admis. Il admet la version suivante pour les séries de fonctions.

1.6. Théorème de la double limite en un point du bord de l'intervalle pour une série de fonctions

Corollaire 10. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et a l'une des extrémités de I ($a = -\infty$ ou $a = +\infty$ est donc possible). Si*

(H1) *la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I*

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n admet une limite finie, notée ℓ_n, en a*

alors

(C1) *la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente*

(C2) *la fonction*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

admet une limite finie en a qui égale $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$

(C3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)$

Exercice 11. — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.
2. Étudier la limite éventuelle de f en $+\infty$.

Exercice 12. — On rappelle que la fonction ζ est définie par

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction ζ est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Étudier la limite éventuelle de ζ en $+\infty$, puis en 1^+.

2. Intégration d'une limite uniforme sur un segment

2.1. Intégration d'une limite uniforme de suite de fonctions continues sur un segment

Théorème 13. — *Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{K})$. Si*

(H1) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} f$

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$*

alors

(C1) *l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est bien définie*

(C2) $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

Remarque 14. — La conclusion 2 du théorème 13 livre

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \lim_{n\to+\infty} f_n$$

L'hypothèse de convergence uniforme est importante dans le théorème 13. La seule convergence simple ne suffit pas. En effet, considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $f_n(1) = 0$ et f_n est affine sur chacun des segments $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$, mais

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t \quad \neq \quad \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Exercice 15. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \sin(x)\ \mathrm{d}x$, quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16. — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\ \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\ \mathrm{d}x$, quand n tend vers $+\infty$.

Le théorème 13 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

2.2. Intégration d'une somme de série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment

Théorème 17. — *Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Si*

(H1) *la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur le segment $[a,b]$*

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$*

Alors

(C1) *l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$ est bien définie*

(C2) *la série numérique $\displaystyle\sum \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$*

Exercice 18. — Démontrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,2^n}$ converge et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}$

2.3. Primitivation d'une limite uniforme de suite de fonctions continues

Corollaire 19. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ et un point $a \in I$. Supposons que*

(H1) $f_n \xrightarrow[I]{CUK} f$

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons

$$F_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

l'unique primitive de f_n (continue sur I) qui s'annule en a et

$$F \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

l'unique primitive de f (continue sur I, cf. théorème 3) qui s'annule en a. Alors

(C) $F_n \xrightarrow[I]{CUK} F$

Le théorème 19 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

2.4. Primitivation terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues

Corollaire 20. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et un point $a \in I$. Supposons que*

(H1) *la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I*

(H2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons

$$F_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

l'unique primitive de f_n (continue sur I) qui s'annule en a et

$$S \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

l'unique primitive de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right. \qquad [\textit{continue sur } I\textit{, cf. corollaire 5}]$$

qui s'annule en a. Alors

(C1) *la série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I*

(C2) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n$, *i.e. pour tout $x \in I$,* $\displaystyle\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$

Exercice 21. — On rappelle que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^x := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction exp est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x e^t\ \mathrm{d}t$ et la calculer. Qu'en déduire ?

Exercice 22. — Soient $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbf{R}$. Justifier l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\, n\, \cos(nt)$ et la calculer.

3. Dérivation de suites de fonctions, de séries de fonctions

Notation. — Dans toute cette partie, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide.

3.1. Critère $\mathcal{C}^1$ pour les suites de fonctions

Théorème 23. — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^2$. Si*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I*

(H2) $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$

(H3) $f_n' \xrightarrow[I]{CUK} g$

alors

(C1) *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I*

(C2) *$f' = g$, i.e. pour tout $x \in I$,* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f_n(x)$

(C3) $f_n \xrightarrow[I]{CUK} f$

Le théorème 23 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

3.2. Critère $\mathcal{C}^1$ pour les séries de fonctions

Théorème 24. — *Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Si*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I*

(H2) *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I*

(H3) *la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I*

alors

(C1) *la fonction*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \;\left|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

(C2) $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$, *i.e. pour tout $x \in I$,* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f_n(x)$

(C3) *la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I*

Exercice 25. — On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \quad u_n(x) := \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge

$$S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$$

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.

2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 26. — Posons

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 27. — Soit $r \in [0,1[$. Démontrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$\arctan\left(\frac{r\sin(t)}{1-r\cos(t)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin(nt)}{n}$$

3.3. Critère $\mathcal{C}^k$ pour les suites de fonctions, où $k \in \mathbf{N}^*$

Corollaire 28. — *Soient $k \in \mathbf{N}^*$, une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $g_0, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})$. Si*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I*

(H2) *pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, $f_n^{(\ell)} \xrightarrow[I]{CS} g_\ell$*

(H3) *$f_n^{(k)} \xrightarrow[I]{CUK} g_k$*

alors

(C1) *$f := g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I*

(C2) *pour tout $\ell \in [\![1, k]\!]$, $f^{(\ell)} = g_\ell$, i.e. pour tout $x \in I$, $\dfrac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\,x^\ell} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\,x^\ell} f_n(x)$*

(C3) *pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, $f_n^{(\ell)} \xrightarrow[I]{CUK} f^{(\ell)}$*

Démonstration. On procède par récurrence sur l'entier naturel non nul k.

- *Initialisation à $k = 1$.* La propriété à établir est précisément celle du théorème 23 ($f \leftarrow g_0$, $g \leftarrow g_1$).
- *Hérédité.* Supposons le résultat établi pour un entier k fixé et considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, et $g_0, g_1, \ldots, g_k, g_{k+1} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ vérifiant

  (H1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I

  (H2) pour tout $\ell \in [\![0, k]\!]$, $f_n^{(\ell)} \xrightarrow[I]{\mathrm{CS}} g_\ell$

  (H3) $f_n^{(k+1)} \xrightarrow[I]{\mathrm{CUK}} g_{k+1}$

  Observons

  (H1') pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

  (H2') $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} g_k$;

  (H3') $f_n^{(k+1)} = \left(f_n^{(k)}\right)' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CUK}} g_{k+1}$.

  En appliquant le théorème 23 $\left((f_n)_{n\in\mathbf{N}} \leftarrow \left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbf{N}} , f \leftarrow g_k , g \leftarrow g_{k+1} \right)$, il vient

  (C1') g_k est de classe $\mathcal{C}^1$

  (C2') $g_k' = g_{k+1}$

  (C3') $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CUK}} g_k$

  Alors (H1), (H2) et (C3') nous donnent

  (H1") pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I

  (H2") pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, $f_n^{(\ell)} \xrightarrow[I]{\mathrm{CS}} g_\ell$

  (H3") $f_n^{(k)} \xrightarrow[I]{\mathrm{CUK}} g_k$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient

(C1") $f := g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$

(C2") pour tout $\ell \in [\![0, k]\!]$, $f^{(\ell)} = g_\ell$

(C3") pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, $f_n^{(\ell)} \xrightarrow[I]{\text{CUK}} f^{(\ell)}$

De (C1"), (C2") et (C1'), on déduit

(C1) $f := g_0$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$

De (C2") et (C2'), on déduit

(C2) pour tout $\ell \in [\![0, k+1]\!]$, $f^{(\ell)} = g_\ell$

De (C3"), (C3') et (C2"), on déduit

(C3) pour tout $\ell \in [\![0, k]\!]$, $f_n^{(\ell)} \xrightarrow[I]{\text{CUK}} f^{(\ell)}$

La propriété est donc établie au rang $k+1$.

□

Le théorème 28 admet la version suivante pour les séries de fonctions.

3.4. Critère $\mathcal{C}^k$ pour les séries de fonctions, où $k \in \mathbf{N}^*$

Corollaire 29. — *Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Si*

(H1) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I*

(H2) *pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(\ell)}$ converge simplement sur I*

(H3) *la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I*

alors

(C1) *la fonction*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \;\left|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I

(C2) *pour tout $\ell \in [\![1, k]\!]$, $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(\ell)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(\ell)}$, i.e. pour tout $x \in I$, $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\,x^\ell} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\,x^\ell} f_n(x)$*

(C3) *pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(\ell)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Éléments de démonstration. On applique le corollaire 28, en spécialisant comme suit

$$(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \leftarrow \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbf{N}} \;,\; g_0 \leftarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_k \;,\; g_1 \leftarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n') \;,\; \dots \;,\; g_k \leftarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(f_n^{(k)}\right)$$

en remarquant que la dérivée d'une somme finie de fonctions dérivables est la somme des fonctions dérivées. □

Exercice 30. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$f_n \;\left|\; \begin{array}{ccc} [0, 1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $[0, 1[$.
2. Soit $x \in [0, 1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.
3. Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [0, 1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, x^n$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.

4. Étude de la fonction ζ de Riemann sur $]1, +\infty[$

Exercice 31. — Soit la fonction

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right. \qquad \text{[fonction } \zeta \text{ de Riemann]}$$

1. Étudier le sens de variation de ζ sur $]1, +\infty[$, sans recours au calcul différentiel.
2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer, pour tout $(k, x) \in \mathbf{N}^* \times]1, +\infty[$, le nombre $\zeta^{(k)}(x)$ comme une somme de série convergente.
3. Déduire de la question 2 une autre démonstration du résultat de la question 1.
4. Que dire de la convexité de la fonction ζ ?
5. Démontrer que $\zeta(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$, puis que $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.
6. Démontrer que $\zeta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, puis que $\zeta(x) \underset{x \to +\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{2^x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^x}\right)$.