Procédés sommatoires discrets

Notation. — Dans ce chapitre, n est un entier naturel non nul $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

1.1. Sommes partielles, convergence et divergence

Définition 1. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$.*

1. *Soit $n \in \mathbf{N}$. La n-ième somme partielle de la série $\sum u_n$ est définie par $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$.*
2. *La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ converge dans $(E, ||\cdot||)$. Elle est dite divergente dans le cas contraire.*

Exemple 2. — La série numérique $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge. En effet, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{[somme télescopique]}$$

Exemple 3. — La série numérique $\sum \frac{1}{n}$, appelée série harmonique, est divergente et il existe une constante γ (constante d'Euler) telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{[la constante } \gamma \text{ est comprise entre } 0,57 \text{ et } 0,58]$$

Exemple 4. — La série $\sum \frac{X^n}{n}$ est divergente dans $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$. En effet, supposons qu'elle converge, notons $S \in \mathbf{R}[X]$ sa somme et considérons un entier naturel fixé $d > \deg(S)$. Alors

$$\left|\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k} - S \right|\right|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}} \tag{1}$$

Nous calculons

$$\forall\, n \geqslant d \qquad \left|\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k} - S \right|\right|_\infty \geqslant \left| \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k} - S \right]_d \right| = \left| \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k} \right]_d \right| = \frac{1}{d} \tag{2}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous déduisons de (1) et (2) que $0 \geqslant \frac{1}{d}$. Contradiction.

1.2. Somme et restes d'une série convergente

Définition 5. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge.*

1. *La somme de la série convergente $\sum u_n$ est définie par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{=:S_n} \qquad \textit{[la somme est la limite de la suite des sommes partielles]}$$

2. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$ est défini par*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{=:S_n}$$

En conservant le contexte de la définition 5

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} 0_E \qquad \text{[la suite des restes converge vers le vecteur nul]}$$

et on pourra s'intéresser à estimer la vitesse de cette convergence.

Exemple 6. — Nous avons vu que la série numérique $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge (cf. exemple 2). De notre étude, nous déduisons que sa somme vaut 1 et que

$$\forall\, n \geqslant 2 \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$$

Exemple 7. — La série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, appelée série harmonique alternée, est convergente et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ vaut $-\ln(2)$.

1.3. Série géométrique

Proposition 8. — *Pour tout $q \in \mathbf{C}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Proposition 9. — *Soit $q \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$.*

1. *La suite de nombres complexes $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, sa limite est nulle.*
2. *La série de nombres complexes $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.*
3. *Si $|q| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.*
4. *Si $|q| < 1$ alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(q^{n+1}\right)$.*

1.4. Série exponentielle

Proposition 10. — *Soit $z \in \mathbf{C}$. La série de nombres complexes $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.*

1.5. Linéarité de la somme d'une série convergente

Proposition 11. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. Si les séries vectorielles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série vectorielle $\sum \lambda\, u_n + \mu\, v_n$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\, u_n + \mu\, v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Exercice 12. — En remarquant que, pour tout $n \geqslant 2$, $n^2 = n(n-1) + n$, démontrer que la série $\sum \frac{n^2}{n!}$ converge et calculer sa somme.

1.6. Le terme général d'une série convergente tend vers le vecteur nul

Proposition 13. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$.*

1. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} 0_E$.*
2. *Si $u_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} 0_E$ alors la série $\sum u_n$ diverge. Dans ce cas, on parle de divergence grossière.*

Exemple 14. — La série $\sum X^n$ est grossièrement divergente dans $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$.

1.7. Lien suite-série et série télescopique

Proposition 15. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$.*

1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $(E, ||\cdot||)$ si et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge dans $(E, ||\cdot||)$.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$.*

Exemple 16. — Étudier la nature de la série numérique $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2. Séries à termes réels positifs ou nuls

2.1. Critère de convergence pour les séries à termes réels positifs ou nuls

Proposition 17. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls.*

1. *La série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $\displaystyle\left(S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.*
2. *Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\{S_n \ :\ n \in \mathbf{N}\}$.*
3. *Si la série numérique $\sum u_n$ diverge alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Éléments de démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc croissante. Les assertions découlent alors du théorème de la limite monotone pour les suites. □

Exercice 18. — À l'aide de l'exemple 2, démontrer que la série numérique $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2.2. Théorème de domination pour les séries à termes réels positifs ou nuls

Théorème 19. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que*

$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

1. *Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.*

L'hypothèse de signe dans le théorème 20 est importante et doit être soulignée lorsqu'on l'applique. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge et

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad -\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Cependant la série $\displaystyle\sum -\frac{1}{n}$ diverge.

2.3. Théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs ou nuls

Théorème 20. — *Soient $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Supposons que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

L'hypothèse de signe dans le théorème 19 est importante et doit être soulignée lorsqu'on l'applique. En effet la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (critère des séries alternées) et

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

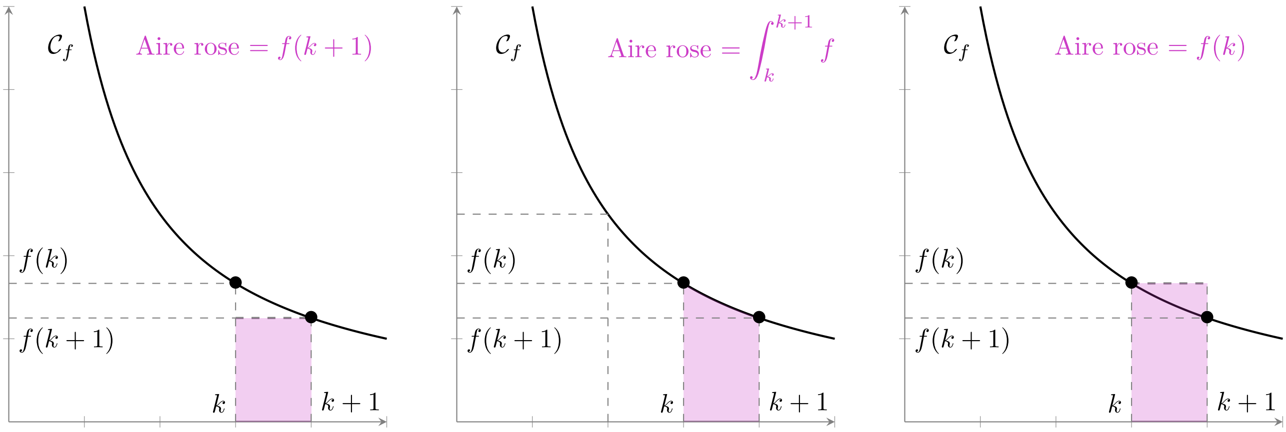
Cependant la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ diverge, puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 21. — Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

3. Technique de comparaison série-intégrale et intégrales de Riemann

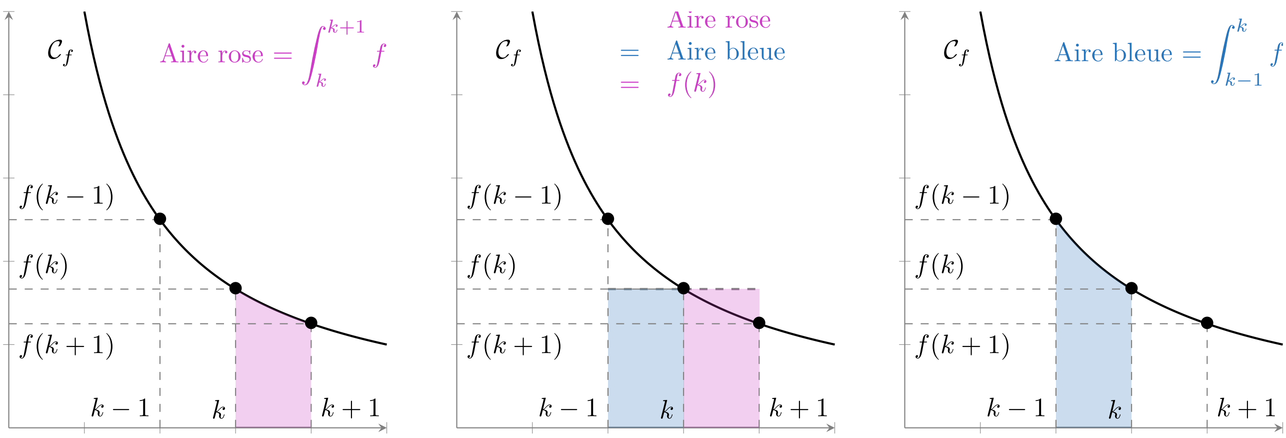
Considérons $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f\colon [n_0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. La technique de comparaison entre la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ repose sur les inégalités géométriques suivantes.

$$\forall\, k \geqslant n_0 \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(k) \tag{3}$$



et

$$\forall\, k \geqslant n_0+1 \quad \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ \mathrm{d}t \tag{4}$$



Théorème 22. — *Soient $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f\colon [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. Alors la série numérique $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*

Éléments de démonstration. Comme la fonction f est positive

- la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite numérique $\displaystyle\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right)_{n \geqslant n_0}$ est majorée ;
- l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $A \longmapsto \displaystyle\int_{n_0}^{A} f(t)\ \mathrm{d}t$ est majorée, si et seulement si la suite numérique $\displaystyle\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n \geqslant n_0}$ est majorée.

Soit $n \geqslant n_0 + 1$. En sommant les inégalités géométriques (3) entre n_0 et $n-1$, il vient

$$-f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

puis

$$0 \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(n_0)$$

□

Corollaire 23. — *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Démontrer que la série numérique (de Riemann) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Exercice 24. — Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Étudier la nature de la série numérique (de Bertrand) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha\ \ln^\beta(n)}$.

> Condidérons $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f\colon [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. En additionnant membre à membre les inégalités géométriques (3) et (4) on peut
>
> - obtenir un équivalent des restes $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ lorsque n tend vers $+\infty$, si la série $\sum f(n)$ converge ;
> - obtenir un équivalent des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ lorsque n tend vers $+\infty$, si la série $\sum f(n)$ diverge ;
>
> si l'on connaît une primitive explicite de la fonction f. De plus, cette démarche s'adapte aux fonctions continues par morceaux, positives et croissantes sur $[n_0, +\infty[$.

Exercice 25. — Déterminer un équivalent de $u_n = 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \ldots + n\sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26. — Soit α un réel strictement positif.

1. Supposons $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Supposons $\alpha = 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Supposons $\alpha < 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27. — Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers 1^+, de la fonction ζ définie par

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

4. Séries absolument convergentes

4.1. Définition d'une série vectorielle absolument convergente

Définition 28. — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. La série vectorielle $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série numérique $\sum ||\, u_n\, ||$ converge.*

Exemple 29. — La série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

Une série vectorielle absolument convergente n'est pas nécessairement convergente, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 30. — La série $\sum \dfrac{X^n}{2^n}$ de l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$ est absolument convergente (la série numérique $\sum 2^{-n}$ converge), mais elle diverge dans $(\mathbf{R}[X], ||\cdot||_\infty)$ (adapter les arguments donnés dans l'exemple 4).

4.2. Série absolument convergente de vecteurs d'un K-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 31. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. Si la série vectorielle $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle converge dans E.*

Exercice 32. — Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Exercice 33. — Soient un entier $p \geqslant 1$ et $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

1. Soit $H \in \mathcal{B}\left(0_{\mathcal{M}_p(\mathbf{K})}, 1\right)$. Démontrer que la série matricielle $\sum (-1)^n H^n$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, puis calculer le produit
$$(I_p + H)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n\right)$$
2. En déduire que $B\left(0_{\mathcal{M}_p(\mathbf{K})}, 1\right) \subset \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$.
3. Pour tout $Q \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$, on définit l'application f_Q par
$$f_Q \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & Q^{-1} A \end{array} \right.$$
Démontrer que $f_Q^{-1}\left(B\left(0_{\mathcal{M}_p(\mathbf{K})}, 1\right)\right)$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, contenue dans $\mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ et contenant Q.
4. En déduire que
$$\mathbf{GL}_p(\mathbf{K}) = \bigcup_{Q\in\mathbf{GL}_p(\mathbf{K})} f_Q^{-1}\left(B\left(0_{\mathcal{M}_p(\mathbf{K})}, 1\right)\right)$$
puis que $\mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

4.3. Théorème de comparaison pour les séries numériques

Théorème 34. — *Soient $(u_n)_{n\in N} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Supposons que*
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$$
Si la série numérique $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

L'hypothèse de signe dans le théorème est importante et doit être soulignée lorsqu'on l'applique. En effet la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et
$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$
Cependant la série numérique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Exercice 35. — Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$.

5. Exponentielle d'un endomorphisme d'un K-e.v. de dimension finie, d'une matrice

5.1. Définitions

Définition 36. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathbf{N}^*$.*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'exponentielle de u, notée e^u ou $\exp(u)$, est la somme de la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ qui converge dans $\mathcal{L}(E)$, i.e.

$$e^u = \exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} \in \mathcal{L}(E)$$

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. L'exponentielle de A, notée e^A ou $\exp(A)$, est la somme de la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ qui converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, i.e.

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$$

Remarque 37. — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(u)) = \exp\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right)$$

Exercice 38. — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $\lambda \in \mathbf{N}$ et $h \in \mathcal{L}(E)$ l'homothétie de rapport λ. Calculer $\exp(h)$.
2. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Calculer $\exp(p)$.
3. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Calculer $\exp(s)$.

5.2. Exponentielle d'une matrice diagonale

Proposition 39. — *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ et $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Alors*

$$\exp(D) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}\right)$$

5.3. Exponentielle de deux matrices semblables

Proposition 40. — *Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ deux matrices semblables sur $\mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ telle que $A = P\,B\,P^{-1}$. Alors*

$$\exp(A) = P\ \exp(B)\ P^{-1}$$

Exercice 41. — Calculer l'exponentielle de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 42. — Calculer l'exponentielle de la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

5.4. Spectre d'une exponentielle de matrice

Proposition 43. — *Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A)$. Alors*

$$e^{\lambda} \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(\exp(A))$$

5.5. Exponentielle d'une somme d'endomorphismes, deux matrices, qui commutent

Proposition 44. — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathbf{N}^*$.*

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors

$$\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telles que $A\,B = B\,A$. Alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\ \exp(B)$$

Démonstration. Considérons une norme sous-multiplicative $||\cdot||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et fixons $n \in \mathbf{N}$. Comme A et B commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de $A+B$.

$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^{s} \frac{s!}{i!\,(s-i)!} A^i B^{s-i} = \sum_{s=0}^{2n} \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!\,(s-i)!} A^i B^{s-i} \tag{5}$$

Si nous posons, pour tout $s \in [\![0, 2n]\!]$

$$D_s := \{(i,j) \in [\![0,n]\!] \ : \ i+j = s\}$$

alors nous déduisons de (5) que

$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{2n} \sum_{(i,j)\in D_s} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j$$

En posant

$$T_{2n} := \bigsqcup_{s=0}^{2n} D_s = \{(i,j) \in [\![0,2n]\!] \ : \ i+j \leqslant 2n\}$$

il vient

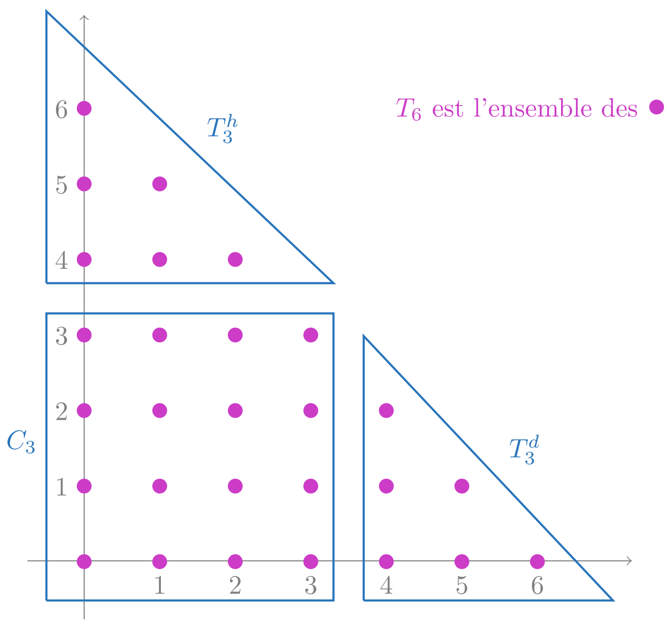
$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{(i,j)\in T_{2n}} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j.$$

Le triangle T_{2n} peut être partitionné comme suit

$$T_{2n} = \underbrace{[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]}_{=:C_n \text{ (carré)}} \ \bigsqcup \ \underbrace{\{(i,j) \in T_{2n} \ : \ j \geqslant p+1\}}_{=:T_n^h \text{ (triangle haut)}} \ \bigsqcup \ \underbrace{\{(i,j) \in T_{2n} \ : \ i \geqslant p+1\}}_{=:T_n^d \text{ (triangle à droite)}}$$

Illustration du découpage

$$T_6 \quad = \quad C_3 \ \bigsqcup \ T_3^h \ \bigsqcup \ T_3^d$$



Ainsi

$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{(A+B)^s}{s!} = \sum_{(i,j)\in C_n} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j + \sum_{(i,j)\in T_n^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j + \sum_{(i,j)\in T_n^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j \qquad (6)$$

Comme

- $\displaystyle \sum_{(i,j)\in C_n} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{B^j}{j!} \right)$
- $\displaystyle \left|\left| \sum_{(i,j)\in T_n^h} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j \right|\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in T_n^h} \frac{1}{i!\,j!} \, ||\, A\,||^i \, ||\, B\,||^j \leqslant \sum_{(i,j)\in \mathbf{N}\times[\![n+1,+\infty[\![} \frac{1}{i!\,j!} \, ||\, A\,||^i \, ||\, B\,||^j = \exp\left(||\, A\,||\right) \left(\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{||\, B\,||^i}{i!} \right)$
- $\displaystyle \left|\left| \sum_{(i,j)\in T_n^d} \frac{1}{i!\,j!} A^i B^j \right|\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in T_n^d} \frac{1}{i!\,j!} \, ||\, A\,||^i \, ||\, B\,||^j \leqslant \sum_{(i,j)\in [\![n+1,+\infty[\![\times\mathbf{N}} \frac{1}{i!\,j!} \, ||\, A\,||^i \, ||\, B\,||^j = \left(\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{||\, A\,||^i}{i!} \right) \exp\left(||\, B\,||\right)$

et comme le produit matriciel est continu, nous pouvons faire tendre n vers $+\infty$ dans l'identité (6) pour en déduire

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$$

□

Exercice 45. — Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Justifier que $\exp(A) \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ et exprimer $\exp(A)^{-1}$ comme une exponentielle de matrice.

Remarque 46. — Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telle que χ_A est scindé sur $\mathbf{K}$, i.e. telle que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Nous démontrerons que

$$\exists!\,(D,N) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \quad \begin{cases} D \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \\ N \text{ est nilpotente} \\ D\,N = N\,D \\ A = D + N \end{cases} \qquad \text{[décomposition de Dunford]}$$

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{GL}_p(\mathbf{K})$ tels que $A = P\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\ P^{-1}$. Si l'on note $\nu \in [\![1, n]\!]$ le nilindice de la matrice nilpotente N, il vient

$$\exp(A) = \exp(D)\ \exp(N) = P\ \exp(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p))\,P^{-1}\ \exp(N) = P\ \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_p}\right)\ P^{-1}\ \left(\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{N^k}{k!}\right)$$

Exercice 47. — Calculer l'exponentielle de la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

6. Règle de d'Alembert pour les séries à termes réels strictement positifs

Théorème 48. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

1. *Si $\ell < 1$, alors la série numérique $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
3. *Si $\ell = 1^+$, alors la série numérique $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Démonstration.

1. Supposons $\ell < 1$ et fixons un réel $q \in]\ell, 1[$. Comme $]-\infty, q[$ est un ouvert contenant la limite ℓ de la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ nous obtenons
$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < q$$
Tous les termes de la série $\sum u_n$ étant strictement positifs, nous en déduisons que
$$\forall\, N > n_0 \quad \underbrace{\prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n}}_{=u_N/u_{n_0}} < \underbrace{\prod_{k=n_0}^{N-1} q}_{=q^{N-n_0}}$$
d'où
$$\forall N > n_0 \quad 0 < u_N < \underbrace{\frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}}_{\text{constante}}\ q^N$$
Puisque $-1 < q < 1$, la série numérique $\sum q^n$ converge. Le théorème de domination pour les séries à termes réels positifs permet alors de conclure.
2. Supposons $\ell > 1$ et fixons un réel $q \in]1, \ell[$. Comme $]q, +\infty[$ est un ouvert contenant la limite ℓ de la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ nous obtenons
$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > q$$
Tous les termes de la série $\sum u_n$ étant strictement positifs, nous en déduisons que
$$\forall\, n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} > q\, u_n > u_n \qquad [\text{car } q > 1]$$
La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est (strictement) croissante, donc minorée par $u_{n_0} > 0$. Elle ne converge pas vers 0, i.e. la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente.

3. Si la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 par valeurs supérieures alors

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

Comme en 2, on en déduit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

$\square$

> Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle que
>
> $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
>
> alors on ne peut rien dire de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} u_n$. En effet, si $\alpha \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n := \dfrac{1}{n^\alpha} > 0$, alors
>
> $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
>
> et nous savons qu'une série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ peut être convergente ou divergente. Précisément, elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 49. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

La règle de d'Alembert ne s'applique donc pas. Ajoutons une hypothèse et supposons que « le quotient de d'Alembert » possède un développement asymptotique de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)}$.
4. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$ en fonction du couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Les résultats des questions 1 et 2 portent le nom de « règle de Raabe-Duhamel ».

Exercice 50. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que

$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

1. Démontrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Quel résultat antérieur peut-on retrouver grâce à la question 1 ?

Le résultat de la question 1 porte le nom de « théorème de comparaison logarithmique ».

Exercice 51. — Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n^2}$ en fonction du réel x.

Exercice 52. — Déterminer la nature de la série $\sum n!\, x^{n^2}$ en fonction du réel x.

7. Critère des séries alternées

Théorème 53. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que*
(H1) $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_n\, u_{n+1} \leqslant 0$
(H2) la suite $(\,|\,u_n\,|\,)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante*
(H3) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La série $\sum u_n$ *converge et, pour tout* $n \in \mathbf{N}$

- $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *a le signe de* u_{n+1} [*signe du reste*]
- $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$ [*majoration de la valeur absolue du reste*]

De plus, on dispose d'encadrements de la somme de la série convergente $\sum u_n$

Cas où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^n\ |u_n|$

$$\forall\, p, q \in \mathbf{N} \quad \sum_{k=0}^{2p+1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{2q} u_k$$

Cas où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^{n+1}\ |u_n|$

$$\forall\, p, q \in \mathbf{N} \quad \sum_{k=0}^{2p} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{2q+1} u_k$$

Éléments de démonstration. On considère le cas où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^n\ |u_n|$ (cf. hypothèse (H1)) et on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ |u_k|$. On démontre alors que

- la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante avec l'hypothèse (H2) ;
- la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante avec l'hypothèse (H2) ;
- $S_{2n+1} - S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ avec l'hypothèse (H3).

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent et ont même limite. Nous en déduisons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge (i.e. que la série de terme général u_n converge) et, avec l'aide du théorème de la limite monotone

$$\forall\, p, q \in \mathbf{N} \quad \sum_{k=0}^{2p+1} u_k \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} S_{2n+1} = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} S_n}_{=: \sum_{n=0}^{+\infty} u_n} = \inf_{n\in\mathbf{N}} S_{2n} \leqslant \sum_{k=0}^{2q} u_k$$

$\square$

L'hypothèse (H2) dans le théorème 53 est essentielle. En effet, la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

vérifie (H1), (H3), mais pas (H2) et la série $\sum u_n$ diverge. En effet

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underbrace{- \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\ \frac{1}{2n}}$$

Exercice 54. — Justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge.

Exercice 55. — Justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 56. — Soit un réel α. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 57. — Démontrer que $\cos(1) = \dfrac{e^i + e^{-i}}{2} \notin \mathbf{Q}$.

8. Transformation d'Abel (HP)

Exercice 58. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{[analogue discret d'une primitive de la suite } (a_n)_{n\in\mathbf{N}}]$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \qquad \text{[transformation d'Abel, analogue discret de l'intégration par parties]}$$

2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telles que :

   (H1) la suite de terme général $A_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée ;

   (H2) la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

   Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que pour tout $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum \dfrac{a_n}{n^\alpha}$ diverge.

4. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Démontrer que la série $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

5. Soient θ et α des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.

9. Sommation des relations de comparaison

Théorème 59. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right) \qquad \textit{et} \qquad \underbrace{\exists\, N \in \mathbf{N} \quad v_n \geqslant 0}_{\textit{hypothèse de signe}}$$

1. *Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

2. *Si la série $\sum v_n$ diverge alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Démonstration.

1. Supposons que la série $\sum v_n$ converge.

   - *Convergence de la série de terme général u_n.*
   Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right)$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$. Comme la série $\sum v_n$, dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang, converge, le théorème de comparaison pour les séries numériques nous livre la convergence de la série $\sum u_n$.
   - *Les restes de la série $\sum u_n$ sont négligeables devant les restes de la série $\sum v_n$.*
   L'assertion

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

à démontrer, peut se formuler comme suit

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \varepsilon \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$

$$\exists\, N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad |u_n| \leqslant \varepsilon\, |v_n|$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k| = \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{v_k}_{\geqslant 0} = \varepsilon \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right|$$

2. Supposons que la série $\sum v_n$ diverge et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \geqslant 0$, pour simplifier la présentation.

- *Comportement asymptotique des sommes partielles de la série de terme général v_n.*
  Comme la série $\sum v_n$ est une série à termes réels positifs qui diverge

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \tag{7}$$

- *Les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont négligeables devant les sommes partielles de la série $\sum v_n$.*
  L'assertion $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k \right)$ à démontrer, peut se formuler comme suit

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant \varepsilon \left| \sum_{k=0}^{n} v_k \right| = \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$

$$\exists\, N_{1,\varepsilon} \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N_{1,\varepsilon} \quad |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, |v_n| = v_n$$

Ainsi

$$\forall\, n \geqslant N_{1,\varepsilon} + 1 \qquad \left| \sum_{k=N_{1,\varepsilon}+1}^{n} u_k \right| \leqslant \sum_{k=N_{1,\varepsilon}+1}^{n} |u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_{1,\varepsilon}+1}^{n} v_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k \tag{8}$$

(ii) D'après (7), la quantité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ est strictement positive à partir d'un certain rang N_0 et, comme $\displaystyle\left| \sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k \right|$ est une constante

$$\frac{\left| \displaystyle\sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k \right|}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi :

$$\exists\, N_{2,\varepsilon} \geqslant N_0 \quad \forall\, n \geqslant N_{2,\varepsilon} \qquad \left| \sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k \tag{9}$$

Posons $N_\varepsilon := \max\{N_{1,\varepsilon} + 1, N_{2,\varepsilon}\}$. Pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k + \sum_{N_{1,\varepsilon}}^{n} u_k \right| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{N_{1,\varepsilon}} u_k \right| + \left| \sum_{N_{1,\varepsilon}}^{n} u_k \right| \underbrace{\leqslant}_{(8)\text{ et }(9)} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k = \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

□

Théorème 60. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\exists N \in \mathbf{N} \quad v_n \geqslant 0}_{\text{hypothèse de signe}}$$

1. *Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
2. *Si la série $\sum v_n$ diverge alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Éléments de démonstration. On adapte la démonstration rédigée du théorème 59. □

Corollaire 61. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\exists N \in \mathbf{N} \quad v_n \geqslant 0}_{\text{hypothèse de signe}}$$

1. *Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
2. *Si la série $\sum v_n$ diverge alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Démonstration.

1. Supposons que la série $\sum v_n$ converge.
   - *Convergence de la série de terme général u_n.*
     Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$. Comme la série $\sum v_n$, dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang, converge, le théorème de comparaison pour les séries numériques nous livre la convergence de la série $\sum u_n$.
   - *Les restes de la série de terme général u_n sont équivalents aux restes de la série de terme général v_n.*
     D'après le théorème 59

     $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - v_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

     d'où $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
2. Supposons que la série $\sum v_n$ converge. diverge. D'après le théorème 59

   $$\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - v_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

   d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

□

Exercice 62. — Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}+5}{k+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

10. Développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique (HP)

Exercice 63. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n := H_n - \ln(n)$.

1. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n} - \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$ est convergente.
2. Expliciter $u_{n+1} - u_n$, puis démontrer
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}\left(1\right)$$
où $\gamma := 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.
3. En écrivant $H_n - \ln(n) - \gamma$ comme le reste d'une série convergente, démontrer
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
4. En écrivant $\dfrac{1}{2n}$ comme le reste d'une série convergente, démontrer
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
5. Comment obtenir un terme de plus dans le développement asymptotique de H_n ?

11. Théorème de Cesàro

Corollaire 64. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels possédant une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors*
$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \qquad [\textit{théorème de Cesàro}]$$

Démonstration.

- Supposons que $\ell \in \mathbf{R}$. Comme $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$ et la série à termes positifs $\sum 1$ diverge, le théorème 59 livre
$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - (n+1)\,\ell = \sum_{k=0}^{n} (u_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{=n+1}\right)$$
On en déduit
$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k\right) - \ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$$
- Supposons que $\ell = +\infty$. Observons que
  — $1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(u_n\right)$
  — u_n est positif à partir d'un certain rang
  — la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement)

  le théorème 59 livre
$$n + 1 = \sum_{k=0}^{n} 1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$
Comme la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ diverge vers $+\infty$, ses termes sont strictement positifs (donc non nuls) à partir d'un certain rang, d'où
$$\frac{n+1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$$

puis

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \left[\text{par opération sur les limites, cf. } \frac{1}{0^+} = +\infty\right]$$

- Le cas $\ell = -\infty$ est obtenu en appliquant le résultat du point précédent à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

$\square$

Le théorème de Cesàro trouve des applications dans la recherche d'équivalents de termes généraux de suites récurrentes, cf. exercice ci-dessous.

Exercice 65. — Soit α un réel strictement positif fixé. Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^\alpha}$.

1. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra chercher un exposant $\beta > 0$ tel que la suite de terme général $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ possède une limite finie non nulle.

12. Familles sommables de réels positifs

12.1. Opérations, ordre et borne supérieure dans $[0,+\infty]$

On étend l'addition de $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ à $[0,+\infty]$ en posant

- $\forall\, x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0} \quad x + (+\infty) = +\infty = (+\infty) + x$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

L'opération $+$, ainsi définie sur $[0,+\infty]$, est associative, commutative, mais elle ne possède aucun élément neutre. L'élément $+\infty$ est absorbant.

On étend partiellement la multiplication de $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ à $[0,+\infty]$ en posant

- $\forall\, x \in \mathbf{R}_{>0} \quad x \times (+\infty) = +\infty = (+\infty) \times x$
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

Les opérations $0 \times (+\infty)$ et $(+\infty) \times 0$ ne sont pas définies.

On étend la relation d'ordre usuelle sur $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ à $[0,+\infty]$ en posant

- $\forall\, x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0} \quad x \leqslant +\infty$
- $+\infty \leqslant +\infty$

La relation d'ordre ainsi obtenue sur $[0,+\infty]$ est totale et $+\infty$ est le maximum de $[0,+\infty]$.

La relation d'ordre $\leqslant$ sur $[0,+\infty]$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$ au sens suivant

- $\forall\, x,y,z \in \mathbf{R}_{\geqslant 0} \quad x \leqslant y \implies x + y \leqslant x + z$
- $\forall\, x,y,z \in \mathbf{R}_{>0} \quad x \leqslant y \implies x \times y \leqslant x \times z$

Proposition 66. — *Toute partie A de $[0,+\infty]$ possède un plus petit majorant dans $[0,+\infty]$, appelée borne supérieure de A et notée* $\sup(A)$.

$$\sup(A) = \begin{cases} 0 & \textit{si } A = \varnothing \\ \textit{borne supérieure de } A \textit{ dans } \mathbf{R} & \textit{si } A \neq \varnothing \textit{ et majorée par un réel} \\ +\infty & \textit{si } A \neq \varnothing \textit{ et non majorée par un réel} \end{cases}$$

12.2. Somme d'une famille d'éléments de $[0,+\infty]$

Rappel. — Soient I est un ensemble fini et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un magma $(M,+)$ associatif, commutatif possédant un élément neutre e_M.

- Si $I=\varnothing$, alors on pose
$$\sum_{i\in I} u_i := e_M$$
- Si $I\neq\varnothing$, alors on pose
$$\sum_{i\in I} u_i := \sum_{k=1}^{\operatorname{card}(I)} u_{\sigma(k)}$$
où $\sigma\colon [\![1,\operatorname{card}(I)]\!] \longrightarrow I$ est une bijection. L'élément de M ainsi défini ne dépend pas du choix de la bijection σ (i.e. de l'ordre dans lequel on somme les éléments).

> Soient I un ensemble fini et $(u_i)_{i\in I}\in[0,+\infty]^I$. Alors
> $$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i \;:\; F \text{ est une partie finie de } I\right\}.$$
> Cette observation fonde la définition suivante.

Définition 67. — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}\in[0,+\infty]^I$. On définit la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$, notée $\sum_{i\in I} u_i$, par*
$$\sum_{i\in I} u_i := \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i \;:\; F \text{ est une partie finie de } I\right\}\in[0,+\infty]$$

12.3. Somme d'une sous-famille de réels positifs

Proposition 68. — *Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}\in[0,+\infty]^I$ et J une partie de I. Alors*
$$\sum_{j\in J} u_j \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

Démonstration. Soit F une partie finie de J. Comme F est également une partie finie de I, il vient
$$\sum_{j\in F} u_j \leqslant \underbrace{\sum_{i\in I} u_i}_{\text{indépendant de } F}$$
Par passage à la borne supérieure sur toutes les parties finies F de J, nous en déduisons, $\sum_{j\in J} u_j \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

□

12.4. Invariance de la somme d'une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ par permutation

Proposition 69. — *Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}\in[0,+\infty]^I$ et $\sigma\colon I\longrightarrow I$ une bijection. Alors*
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

Éléments de démonstration. À l'aide du théorème de changement d'indice pour les sommes d'un nombre fini de termes, on vérifie l'égalité ensembliste
$$\left\{\sum_{i\in F} u_i \;:\; F \text{ est une partie finie de } I\right\} = \left\{\sum_{i\in G} u_{\sigma(i)} \;:\; G \text{ est une partie finie de } I\right\}$$
Les bornes supérieures de ces deux parties de $[0,+\infty]$ sont donc égales. □

12.5. Somme d'une famille de réels positifs indexée par $\mathbf{N}$ et lien avec les séries

Proposition 70. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [0,+\infty[^{\mathbf{N}}$. Alors*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \in [0,+\infty]$$

Démonstration.

- Comme la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sup\left\{ \sum_{k\in[\![0,n]\!]} u_k \ :\ n\in\mathbf{N} \right\}$$

  d'après le théorème de la limite monotone. L'assertion à démontrer se reformule donc comme suit

$$\sup\left\{ \sum_{k\in F} u_k \ :\ F \text{ est une partie finie de } \mathbf{N} \right\} = \sup\left\{ \sum_{k\in[\![0,n]\!]} u_k \ :\ n\in\mathbf{N} \right\} \tag{10}$$

- Soit F une partie finie non vide de $\mathbf{N}$. Alors F possède un maximum. Comme, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$

$$\sum_{k\in F} u_k \leqslant \sum_{k\in[\![0,\max(F)]\!]} u_k \leqslant \underbrace{\sup\left\{ \sum_{k\in[\![0,n]\!]} u_k \ :\ n\in\mathbf{N} \right\}}_{\text{indépendant de } F}$$

  Cette inégalité valant aussi pour $F=\varnothing$, nous pouvons passer à la borne supérieure sur toutes les parties finies de $\mathbf{N}$ pour obtenir l'inégalité

$$\sup\left\{ \sum_{k\in F} u_k \ :\ F \text{ est une partie finie de } \mathbf{N} \right\} \leqslant \sup\left\{ \sum_{k\in[\![0,n]\!]} u_k \ :\ n\in\mathbf{N} \right\} \tag{11}$$

- Soit $n\in\mathbf{N}$. Comme $[\![0,n]\!]$ est une partie finie de $\mathbf{N}$

$$\sum_{k\in[\![0,n]\!]} u_k \leqslant \underbrace{\sup\left\{ \sum_{k\in F} u_k \ :\ F \text{ est une partie finie de } \mathbf{N} \right\}}_{\text{indépendant de } F}$$

  En passant à la borne supérieure sur tous les entiers $n\in\mathbf{N}$, il vient

$$\sup\left\{ \sum_{k\in[\![0,n]\!]} u_k \ :\ n\in\mathbf{N} \right\} \leqslant \sup\left\{ \sum_{k\in F} u_k \ :\ F \text{ est une partie finie de } \mathbf{N} \right\} \tag{12}$$

- L'assertion (10) à établir est conséquence de (11) et (12).

$\square$

Exemple 71. — Soit un réel $q \geqslant 0$. La somme de la famille de réels positifs $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donnée par

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q\geqslant 1 \\[1ex] \dfrac{1}{1-q} & \text{si } q<1 \end{cases}$$

12.6. Famille sommables de réels positifs

Définition 72. — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} u_i < \infty$.*

Exemple 73. — Soit un réel $q \geqslant 0$. D'après l'exemple 71, la famille de réels positifs $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable si et seulement si $q<1$.

12.7. Famille sommables de réels positifs indexée par $\mathbf{N}$

Proposition 74. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [0,+\infty[^{\mathbf{N}}$. La famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente.*

Démonstration. Conséquence de la proposition 70. □

Exemple 75. — Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la famille de réels positifs $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 1$.

12.8. Opérations sur les sommes de familles de réels positifs

Proposition 76. — *Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_{>0}$. Alors*

$$\sum_{i\in I}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

Démonstration.

- Soit F une partie finie de I. D'après les résultats sur la linéarité des sommes finies

$$\sum_{i\in F}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i) = \lambda \sum_{i\in F} u_i + \mu \sum_{i\in F} v_i \leqslant \underbrace{\lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i}_{\text{indépendant de } F}$$

  Par passage à la borne supérieure sur toutes les parties finies de I, il vient

$$\sum_{i\in I}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i) \leqslant \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i \tag{13}$$

- Comme, pour tout $i \in I$

$$u_i \leqslant \frac{1}{\lambda}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i) \qquad \text{et} \qquad v_i \leqslant \frac{1}{\mu}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i)$$

  si $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$ ou $\sum_{i\in I} v_i = +\infty$ alors $\sum_{i\in I}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i) = +\infty$ et l'inégalité

$$\lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i)$$

  est vraie. Aussi supposons nous $\sum_{i\in I} u_i \in \mathbf{R}_+$ et $\sum_{i\in I} v_i \in \mathbf{R}_+$.
  Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe deux parties finies F_ε et G_ε de I telles que

$$\sum_{i\in I} u_i - \frac{\varepsilon}{\lambda} < \sum_{i\in F_\varepsilon} u_i \leqslant \sum_{i\in F_\varepsilon \cup G_\varepsilon} u_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} v_i - \frac{\varepsilon}{\mu} < \sum_{i\in G_\varepsilon} v_i \leqslant \sum_{i\in F_\varepsilon \cup G_\varepsilon} v_i$$

  D'après les résultats de linéarité pour les sommes d'un nombre fini de termes, nous en déduisons

$$\lambda\left(\sum_{i\in I} u_i - \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) + \mu\left(\sum_{i\in I} v_i - \frac{\varepsilon}{\mu}\right) < \lambda \sum_{i\in F_\varepsilon \cup G_\varepsilon} u_i + \mu \sum_{i\in F_\varepsilon \cup G_\varepsilon} v_i = \sum_{i\in F_\varepsilon \cup G_\varepsilon}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i) \leqslant \sum_{i\in I}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i)$$

  puis

$$\lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon < \sum_{i\in I}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i)$$

  Ceci étant vrai pour $\varepsilon > 0$ quelconque, il vient

$$\lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I}(\lambda\, u_i + \mu\, v_i) \tag{14}$$

- De (13) et (14), nous déduisons l'identité demandée.

□

Les calculs sur les familles de réels positifs sont justifiés par la seule positivité et ils fournissent un moyen efficace d'étudier la sommabilité.

12.9. Suite exhaustives : cas des familles de nombres réels positifs (HP)

Définition 77. — *Soit I un ensemble. Une suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties de I est dite exhaustive si*

1. *pour tout $n \in \mathbf{N}$, I_n est fini* [*finitude*]
2. *pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n \subset I_{n+1}$* [*croissance*]
3. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n = I$ [*les parties $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ recouvrent I*]

Exercice 78. — Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ une famile de réels positifs.

1. Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ une famile de réels positifs et $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties de I. Démontrer que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série de terme général $\displaystyle\sum_{i\in I_n} u_i$ converge.
2. Soient (a,b) deux nombres réels strictement positifs.
   (a) Démontrer que la famille $(C_n := [\![0,n]\!] \times [\![0,n]\!])_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite exhaustive de parties de $\mathbf{N}^2$.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\left(\dfrac{1}{a^n b^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$ soit sommable.
   (c) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbf{N}^2} \frac{1}{a^n b^m}$.

12.10. Théorème de sommation par paquets : cas réel positif

Définition 79. — *Soient I un ensemble et $(I_j)_{j\in J}$ une famille de parties de I. On dit que $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I si*

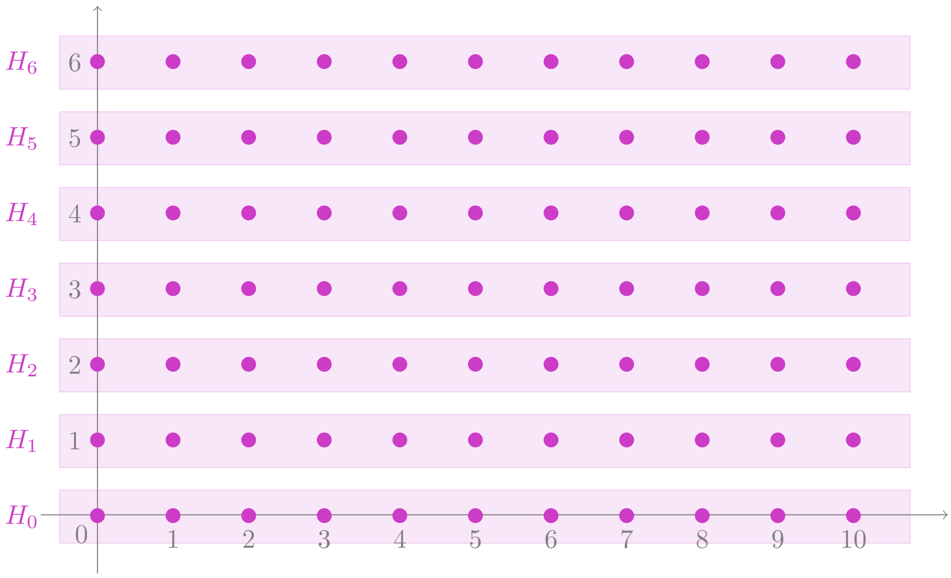
1. $\displaystyle\bigcup_{j\in J} I_j = I$;
2. *les ensemble I_j $(j \in J)$ sont deux à deux disjoints, i.e.*

$$\forall (j_1, j_2) \in J^2 \quad j_1 \neq j_2 \Longrightarrow I_{j_1} \cap I_{j_2} = \varnothing.$$

Exemple 80. — Si on pose, pour tout $j \in \mathbf{N}$:

$$H_j := \{(i,j) \ : \ i \in \mathbf{N}\}$$

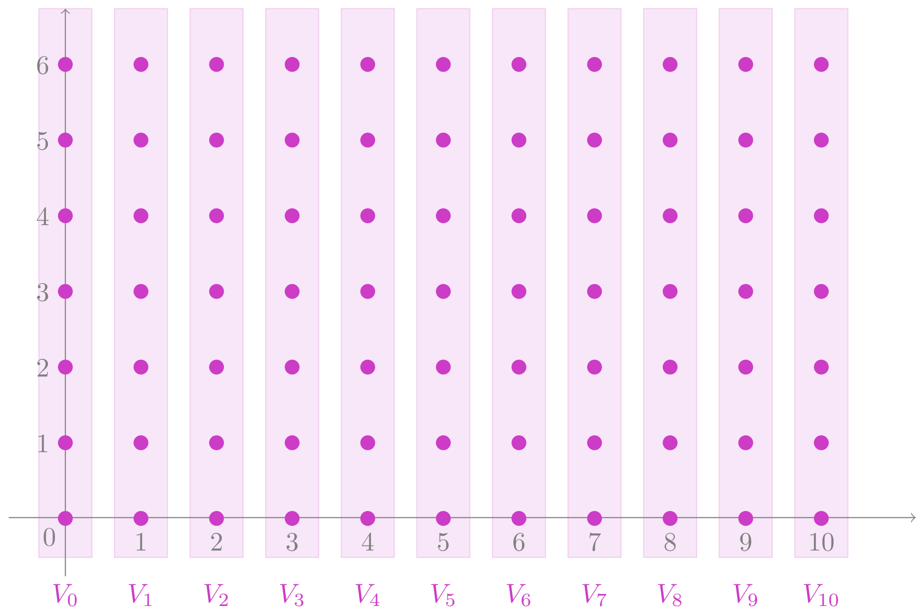
alors $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une partition de $\mathbf{N}^2$, appelée partition horizontale de $\mathbf{N}^2$.



Exemple 81. — Si on pose, pour tout $i \in \mathbf{N}$:

$$V_i := \{(i, j) \ : \ j \in \mathbf{N}\}$$

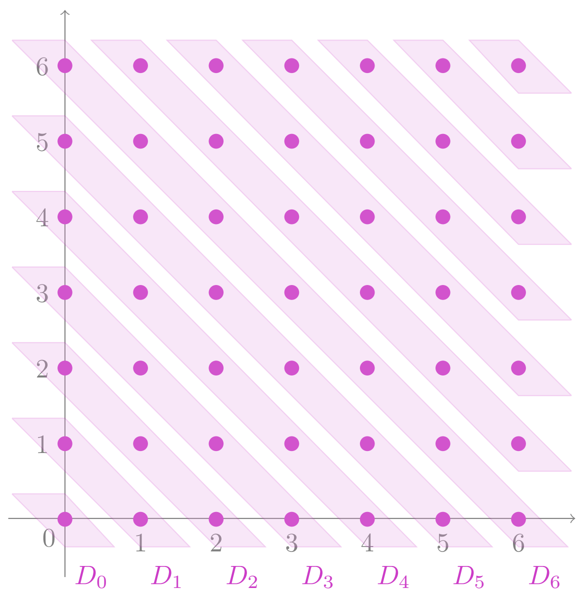
alors $(V_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une partition de $\mathbf{N}^2$, appelée partition verticale de $\mathbf{N}^2$.



Exemple 82. — Si on pose, pour tout $s \in \mathbf{N}$

$$D_s := \{(i, s-i) \ : \ i \in [\![0, s]\!]\}$$

alors $(D_s)_{s \in \mathbf{N}}$ est une partition de $\mathbf{N}^2$, appelée partition diagonale de $\mathbf{N}^2$. Remarquons que, pour tout $s \in \mathbf{N}$, l'ensemble D_s est fini de cardinal $s+1$.



Théorème 83. — *Soit I un ensemble, $(u_i)_{i \in I} \in [0, +\infty]^I$ et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de l'ensemble d'indices I. Alors*

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i \qquad [\textit{identité entre éléments de } [0, +\infty]\,]$$

Démonstration.

- Soit F une partie finie de I. Comme
$$F = \bigsqcup_{j \in J} F \cap I_j$$
  — l'ensemble $J_F := \{j \in J \,:\, F \cap I_j \neq \varnothing\}$ est une partie finie de J
  — pour tout $j \in J_F$, $F \cap I_j$ est une partie finie de I_j et $\displaystyle\sum_{i \in F \cap I_j} u_i \leqslant \sum_{i \in I_j} u_i$.

  Ainsi
$$\begin{aligned}
\sum_{i \in F} u_i &= \sum_{j \in J_F} \sum_{i \in F \cap I_j} u_i && \text{[relation de Chasles pour les sommes d'un nombre fini de termes]} \\
&\leqslant \sum_{j \in J_F} \sum_{i \in I_j} u_i && \text{[somme d'un nombre fini d'inégalités membre à membre]} \\
&\leqslant \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i}_{\text{indépendant de } F} && \left[J_F \text{ est une partie finie de } J \text{ et définition de la somme de } \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J} \right]
\end{aligned}$$
  Par passage à la borne supérieure sur les parties finies F de I, il vient
$$\sum_{i \in I} u_i \leqslant \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) \tag{15}$$

- S'il existe $j \in J$ tel que $\displaystyle\sum_{i \in I_j} u_i = +\infty$ alors $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i = +\infty$ puisque $(u_i)_{i \in I_j}$ est une sous-famille de $(u_i)_{i \in I}$. Aussi supposons nous que, pour tout $j \in J$, $\displaystyle\sum_{i \in I_j} u_i \in \mathbf{R}_+$.

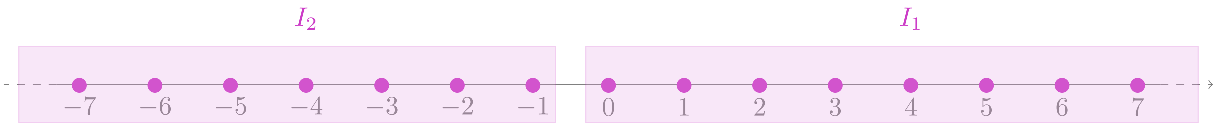
  Soit F une partie finie non vide de J. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \in F$, il existe une partie finie A_j de I_j telle que
$$\sum_{i \in I_j} u_i - \frac{\varepsilon}{|F|} < \sum_{i \in A_j} u_i$$
  Ainsi
$$\sum_{j \in F} \sum_{i \in I_j} u_i - \varepsilon < \sum_{j \in F} \sum_{i \in A_j} u_i \qquad \text{[somme d'un nombre fini d'inégalités membre à membre]}$$
  D'après la relation de Chasles pour les sommes finies d'un nombre fini de termes
$$\sum_{j \in F} \sum_{i \in A_j} u_i = \sum_{i \,\in\, \sqcup_{j \in F} A_j} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i \qquad [\sqcup_{j \in F} A_j \text{ est une partie finie de } I]$$
  Ainsi
$$\sum_{j \in F} \sum_{i \in I_j} u_i - \varepsilon < \sum_{i \in I} u_i$$
  Ceci étant vrai pour $\varepsilon > 0$ quelconque, nous en déduisons
$$\sum_{j \in F} \sum_{i \in I_j} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i$$
  Cette dernière inégalité valant aussi si F est vide, nous pouvons passer à la borne supérieure sur toutes les parties finies de J pour obtenir
$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i \tag{16}$$

- De (15) et (16), nous déduisons l'identité demandée.

$\square$

Exemple 84. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{Z}}$. Équippons $\mathbf{Z}$ de la partition formée des deux parties

$$I_1 := \mathbf{N} \qquad \text{et} \qquad I_2 := \{-n \ : \ n \in \mathbf{N}^*\}$$



D'après le théorème 83, la famille $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont sommables. En appliquant la proposition 70, on en déduit les deux résultats suivants.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$
2. la famille $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_{-n}$ convergent.

Exercice 85. — Soit q un réel strictement positif. La famille $\displaystyle\left(\frac{1}{q^n}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est-elle sommable ?

12.11. Théorème de Fubini : cas réel positif

Théorème 86. — *Soient I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in [0,+\infty]^{I\times J}$. Alors*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

Démonstration. Nous appliquons le théorème 83 à la partition $I\times J = \displaystyle\bigsqcup_{i\in I} \{i\}\times J$ pour obtenir

$$\sum_{i\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j}$$

De même, en appliquant le théorème 83 à la partition $I\times J = \displaystyle\bigsqcup_{j\in J} I\times\{j\}$ il vient

$$\sum_{i\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$$

□

12.12. Sélection d'exercices sur les familles sommables de réels positifs

Exercice 87. — La famille de réels positifs $\displaystyle\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est-elle sommable ?

Exercice 88. — Étudier la sommabilité de la famille de réels positifs $\displaystyle\left(\frac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbf{Q}_{\geqslant 1}}$.

Exercice 89. — Calculer la somme de la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{2^n\,3^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$.

Exercice 90. — Étudier la sommabilité de la famille de réels positifs $\displaystyle\left(\frac{1}{4^n+5^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$.

Exercice 91. — Étudier la sommabilité de la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(n+m)^4}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$.

Exercice 92. — On rappelle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Considérons l'ensemble $I=\{2n+1\ :\ n\in\mathbf{N}\}$ des entiers naturels impairs. Démontrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 93. — On rappelle que les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ sont notées respectivement $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

1. Notons $I=\{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*\ :\ n \text{ divise } m\}$. Exprimer $\displaystyle\sum_{(n,m)\in I}\frac{1}{n^2m^2}$ à l'aide de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.
2. Notons $J=\{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*\ :\ n\wedge m=1\}$. Exprimer $\displaystyle\sum_{(n,m)\in J}\frac{1}{n^2m^2}$ à l'aide de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$. On pourra poser, pour tout $d\in\mathbf{N}^*$, $J_d=\{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*\ :\ n\wedge m=d\}$ et commencer par montrer que $\displaystyle\zeta(2)^2=\sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(n,m)\in J_d}\frac{1}{n^2m^2}$.

Exercice 94. — Soient $a>1$ et $b>1$. Démontrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{a^n+b^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.

Exercice 95. — Soit α un réel strictement positif.

1. Pour quelles valeurs de α la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est-elle sommable ?
2. Pour quelles valeurs de α la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{n^\alpha+m^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est-elle sommable ?

Exercice 96. — Démontrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)_{(a,b,c)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ n'est pas sommable.

Exercice 97. — Pour tout entier $p\geqslant 2$, posons $\displaystyle\zeta(p):=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2}(\zeta(p)-1)$ converge et calculer sa somme.

13. Familles sommables de nombres complexes

13.1. Définition de la sommabilité d'une famille de nombres complexes

Définition 98. — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}\in\mathbf{C}^I$. La famille $(ai)_{i\in I}$ est sommable si* $\displaystyle\sum_{i\in I}|u_i|<+\infty$.

13.2. L'espace vectoriel $\ell^1(I)$

Proposition 99. — *Soit I un ensemble non vide. Alors*

$$\ell^1(I):=\left\{(u_i)_{i\in I}\in\mathbf{C}^I\ :\ \textit{la famille } (u_i)_{i\in I} \textit{ est sommable}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^I$.

Remarque 100. — Soit I un ensemble non vide. L'application

$$||\cdot||\ \left|\ \begin{array}{ccc}\ell^1(I) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+\\ (u_i)_{i\in I} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\in I}|u_i|\end{array}\right.$$

est une norme.

13.3. Sommabilité d'une famille de nombres complexes indexée par N et lien avec les séries

Proposition 101. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. La famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{la famille } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est sommable} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbf{N}} |u_n| < +\infty \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k| < +\infty \\ &\Longleftrightarrow: \quad \text{la série } \sum |u_n| \text{ converge} \end{aligned}$$

□

13.4. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable de nombres complexes

Proposition 102. — *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable. Alors, pour toute partie J de I, la sous-famille $(u_j)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$ est sommable.*

Démonstration. Conséquence de la proposition 68. □

13.5. Théorème de domination pour les familles sommables de nombres complexes

Théorème 103. — *Soient I un ensemble et deux familles $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$, $(v_i)_{i\in I} \in [0,+\infty[^I$ telles que*

$$\forall\, i \in I, \quad |u_i| \leqslant v_i \qquad [\textit{hypothèse de domination}]$$

Si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Démonstration. Soit F une partie finie de I. Alors

$$\sum_{i\in F} |u_i| \leqslant \sum_{i\in F} v_i \qquad [\text{somme d'un nombre fini d'inégalités membre à membre}]$$

Ainsi

$$\sum_{i\in F} |u_i| \leqslant \underbrace{\sum_{i\in I} v_i}_{\text{indépendant de } F}$$

Par passage à la borne supérieure sur toutes les parties finies de I, il vient $\sum_{i\in I} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} v_i$. □

13.6. Somme d'une famille sommable de nombres complexes

Définition 104. — *Soient J un ensemble et $(u_j)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$ une famille sommable. On pose, pour tout $j \in J$*

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Re}(u_j)^+ = \max\{\operatorname{Re}(u_j), 0\} \geqslant 0 & \qquad \operatorname{Re}(u_j)^- = \min\{\operatorname{Re}(u_j), 0\} \leqslant 0 \\ \operatorname{Im}(u_j)^+ = \max\{\operatorname{Im}(u_j), 0\} \geqslant 0 & \qquad \operatorname{Im}(u_j)^- = \min\{\operatorname{Im}(u_j), 0\} \leqslant 0 \end{array}$$

de sorte que

$$\operatorname{Re}(u_j) = \operatorname{Re}(u_j)^+ - \left(-\operatorname{Re}(u_j)^-\right) \qquad \operatorname{Im}(u_j) = \operatorname{Im}(u_j)^+ - \left(-\operatorname{Im}(u_j)^-\right)$$

et

$$u_j = \left(\operatorname{Re}(u_j)^+ - \left(-\operatorname{Re}(u_j)^-\right)\right) + i\,\left(\operatorname{Im}(u_j)^+ - \left(-\operatorname{Im}(u_j)^-\right)\right).$$

Alors les familles de réels positifs

$$\left(\operatorname{Re}(u_j)^+\right)_{j\in J} \qquad \left(-\operatorname{Re}(u_j)^-\right)_{j\in J} \qquad \left(\operatorname{Im}(u_j)^+\right)_{j\in J} \qquad \left(-\operatorname{Im}(u_j)^-\right)_{j\in J}$$

sont sommables et on pose

$$\sum_{j\in J} u_j := \left(\sum_{j\in J} \operatorname{Re}(u_j)^+ - \sum_{j\in J}\left(-\operatorname{Re}(u_j)^-\right)\right) + i\,\left(\sum_{j\in J} \operatorname{Im}(u_j)^+ - \sum_{j\in J}\left(-\operatorname{Im}(u_j)^-\right)\right) \in \mathbf{C}.$$

Le résultat suivant est fort commode pour calculer des sommes de familles sommables de nombres complexes. Pour toute famille sommable de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

$$\underbrace{\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n}_{\text{somme de famille sommable}} \quad = \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}_{\text{somme de série convergente}} \quad := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

13.7. Approximation de la somme d'une famille sommable de nombres complexes

Proposition 105. — *Soient J un ensemble et $(u_j)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$ une famille sommable. Alors*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \ \text{ partie finie de } J \quad \left| \sum_{j\in J} u_j - \sum_{j\in F} u_j \right| \leqslant \varepsilon$$

13.8. Invariance de la somme d'une famille sommable de complexes par permutation

Proposition 106. — *Soient J un ensemble, $(u_j)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$ une famille sommable et $\sigma\colon J \longrightarrow J$ une bijection. Alors la famille $\left(u_{\sigma(j)}\right)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$ est sommable et*

$$\sum_{j\in J} u_J = \sum_{i\in J} u_{\sigma(j)}$$

Démonstration. D'après la proposition 69

$$\sum_{i\in J} \left|u_{\sigma(j)}\right| = \sum_{i\in J} |u_j| < +\infty$$

donc la famille $\left(u_{\sigma(j)}\right)_{j\in J}$ est sommable. Nous calculons

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J} u_j \ &:= \left(\sum_{j\in J} \operatorname{Re}(u_j)^+ - \sum_{j\in J} \Big(-\operatorname{Re}(u_j)^- \Big) \right) + i \left(\sum_{j\in J} \operatorname{Im}(u_j)^+ - \sum_{j\in J} \Big(-\operatorname{Im}(u_j)^- \Big) \right) \\
&= \left(\sum_{j\in J} \operatorname{Re}\left(u_{\sigma(j)}\right)^+ - \sum_{j\in J} \Big(-\operatorname{Re}\left(u_{\sigma(j)}\right)^- \Big) \right) + i \left(\sum_{j\in J} \operatorname{Im}\left(u_{\sigma(j)}\right)^+ - \sum_{j\in J} \Big(-\operatorname{Im}\left(u_{\sigma(j)}\right)^- \Big) \right) \qquad \text{[prop. 69]} \\
&=: \sum_{j\in J} u_{\sigma(j)}
\end{aligned}$$

□

13.9. Modification de l'ordre des termes de la série harmonique alternée (HP)

Exercice 107. — Nous avons démontré que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et que sa somme vaut $\ln(2)$, au moyen de ll'inégalité de Taylor-Lagrange. Nous nous proposons, ici, d'étudier une série obtenue en modifiant l'ordre des termes de la série harmonique alternée.
Soient a et b des nombres entiers naturels non nuls. À partir de la suite $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$, on en construit une nouvelle en prenant a termes positifs, puis b termes négatifs, puis a termes positifs, puis b termes négatifs... Cette nouvelle suite sera notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
Par exemple, si $a = 3$ et $b = 2$, les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont

$$\underbrace{1\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{5}}_{\text{3 termes}}\,,\ \underbrace{-\frac{1}{2}\,,\ -\frac{1}{4}}_{\text{2 termes}}\,,\ \underbrace{\frac{1}{7}\,,\ \frac{1}{9}\,,\ \frac{1}{11}}_{\text{3 termes}}\,,\ \underbrace{-\frac{1}{6}\,,\ -\frac{1}{8}}_{\text{2 termes}}\,,\ \ldots$$

1. Démontrer que

$$\mathbf{N}^* = \bigcup_{q\in\mathbf{N}} \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\}$$

et pour tout $(q_1, q_2) \in \mathbf{N}^2$ tel que $q_1 \neq q_2$

$$\{q_1(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\} \ \cap \ \{q_2(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\} = \emptyset$$

Nous pouvons alors préciser la définition du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après ce qui précède, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbf{N} \times [\![1\ ;\ a+b]\!]$ tel que $n = q(a+b) + r$. Alors

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2(qa+r)-1} & \text{si } r \leqslant a \\ -\dfrac{1}{2(qb+r-a)} & \text{si } r \geqslant a+1 \end{cases}$$

Afin d'étudier la série $\sum u_n$, on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$$

2. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. En s'inspirant de la partition de $\mathbf{N}^*$ introduite à la question 1, démontrer

$$S_{m(a+b)} = \sum_{k=1}^{ma} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mb} \frac{1}{2k}$$

puis exprimer la somme $S_{m(a+b)}$ à l'aide de certains des nombres H_n, où $n \in \mathbf{N}^*$.

3. On rappelle que

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

où γ est la constante d'Euler. Démontrer

$$S_{m(a+b)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $m = E\left(\dfrac{n}{a+b}\right)$. Démontrer que :

$$\left|S_n - S_{m(a+b)}\right| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0\,.$$

5. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et que sa somme vaut $\ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

13.10. Linéarité de la somme d'une famille sommable de nombres complexes

Proposition 108. — *Soient I un ensemble, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$, $(v_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ deux familles sommables. Alors la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et*

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

13.11. Théorème de sommation par paquets : cas complexe

Théorème 109. — *Soit I un ensemble, $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de l'ensemble d'indices I. Alors*

1. *pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable*
2. *la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable*
3. $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$

Pour vérifier l'hypothèse de sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ dans le théorème 109, nous pourrons appliquer le théorème de sommation par paquets dans le cas positif (théorème 83).

13.12. Théorème de Fubini : cas complexe

Théorème 110. — *Soient I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbf{C}^{I\times J}$ une famille sommable.*

1. (a) *Pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable.*

   (b) *La famille $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.*

   (c) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)$.

2. (a) *Pour tout $j \in J$, la famille $(u_{i,j})_{i\in I}$ est sommable.*

   (b) *La famille $\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable.*

   (c) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$.

Pour vérifier l'hypothèse de sommabilité de la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbf{C}^I$ dans le théorème 110, nous pourrons appliquer le théorème de Fubini dans le cas positif (théorème 86).

L'hypothèse de sommabilité dans le théorème 110 est cruciale, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 111. — Démontrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{+\infty}\frac{1}{n^2-m^2} \neq \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{+\infty}\frac{1}{n^2-m^2}$$

après avoir justifié de l'existence de toutes les quantités en jeu.

13.13. Produit d'un nombre fini de familles sommables

Corollaire 112. — *Soient des ensembles I, J et des familles sommables $(a_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$, $(b_j)_{j\in J} \in \mathbf{C}^J$. Alors la famille $(a_i\, b_j)_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbf{C}^{I\times J}$ est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i\, b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Démonstration. Conséquence directe des théorèmes de Fubini 86 (pour la sommabilité) et 110 (pour l'identité). ☐

Remarque 113. — Le corollaire 112 se généralise au produit d'un nombre fini de familles sommables.

13.14. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Théorème 114. — *Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{m\geqslant 0} b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Alors la série :*

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \left[\textit{produit de Cauchy des deux séries } \sum_{n\geqslant 0} a_n \textit{ et } \sum_{m\geqslant 0} b_n\right]$$

est absolument convergente et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

L'hypothèse d'absolue convergence dans le theorème 114 est essentielle, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exercice 115. — Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et établir la divergence de son produit de Cauchy avec elle-même.

13.15. L'exponentielle est un morphisme de groupes de $(\mathbf{C},+)$ dans $(\mathbf{C}^*,\times)$

Corollaire 116. — *L'application :*

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{C},+) & \longrightarrow & (\mathbf{C}^*,\times) \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes, i.e.

$$\forall\,(z_1,z_2)\in\mathbf{C} \quad \exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\,\exp(z_2)$$

13.16. Sélection d'exercices sur les familles sommables de nombres complexes

Exercice 117. — Soit $z\in\mathbf{C}$ tel que $|z|<1$. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, notons $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Démontrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)z^n$$

en justifiant l'existence de ces deux sommes en cours d'étude.

Exercice 118. — Soit $a\in\mathbf{C}$ tel que $|a|<1$. Démontrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1-a^{2n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{2n-1}}{1-a^{2n-1}}$$

en justifiant l'existence de ces deux sommes en cours d'étude.

Exercice 119. — Soient $\alpha\in\,]1,+\infty[$ et $q\in\mathbf{C}$ tel que $|q|<1$. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{q^n}{m^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable, puis exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ de Riemann.

Exercice 120. — Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n$ une série absolument convergente de complexes. Démontrer que la série $\displaystyle\sum\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}2^k a_k\right)$ converge et a pour somme $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

Exercice 121. — Soient $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant

$$p_1=2 \quad , \quad p_2=3 \quad , \quad p_3=5 \quad , \quad p_4=7 \quad , \quad \ldots$$

et x un nombre réel strictement plus grand que 1.

1. Démontrer que la suite $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-p_i^{-x}}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et majorée par $\displaystyle\zeta(x):=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.
2. Démontrer que

$$\zeta(x)=\prod_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{1-p_i^{-x}}:=\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-p_i^{-x}} \qquad \text{[décomposition de } \zeta(x) \text{ en produit Eulérien]}$$

3. Démontrer que la suite $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-p_i^{-1}}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ diverge. En déduire que la série $\displaystyle\sum\frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge.