Probabilités 1

1. Ensembles dénombrables

1.1. Définition et premiers exemples

Définition 1. — *Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow E$.*

Soit E un ensemble.

1. Si E est dénombrable, l'existence d'une bijection $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow E$ nous permet de dresser une liste exhaustive et sans répétition des éléments de E :

$$L := (f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots)$$

L'injectivité de f assure qu'il n'y a pas de répétition dans la liste L. Tous les éléments de E figure dans la liste L, en raison du caractère surjectif de f.

2. Réciproquement, si nous disposons d'une liste exhaustive et sans répétition des éléments de E

$$L = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

alors l'ensemble E est dénombrable puisque l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{array} \right.$$

est bijective. En effet, l'absence de répétition dans la liste L livre le caractère injectif de f. Quant à la surjectivité de f, elle est conséquence du caractère exhaustif de la liste L.

Exemple 2. — L'application

$$\mathrm{id}_{\mathbf{N}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \right.$$

est bijective. L'ensemble $\mathbf{N}$ est donc dénombrable.

Exemple 3. — Les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^* & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array} \right.$$

sont bien définies. Comme $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{N}^*}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$ l'application f est bijective. L'ensemble $\mathbf{N}^*$ est donc dénombrable.

Exercice 4. — Démontrer que l'ensemble $S = \left\{(u,v) \in \mathbf{Z}^2 \ :\ 7\,u + 11\,v = 1\right\}$ est dénombrable.

1.2. Parties infinies de N

Proposition 5. — *Toute partie infinie de* $\mathbf{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration.

- Soit A une partie infinie de $\mathbf{N}$. On construit par récurrence forte une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$.
  — *Initialisation.* La partie A de $\mathbf{N}$ est infinie donc non vide. Par propriété de bon ordre, l'élément
  $$a_0 := \min(A) \in A$$
  est bien défini.
  — *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons construits $a_0, \ldots, a_n$ éléments de A. La partie $\{a_0, \ldots, a_n\}$ de A n'est pas égale à A puisque A est infini. Ainsi la partie $A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$ n'est pas vide. Par propriété de bon ordre, l'élément
  $$a_{n+1} := \min\left(A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}\right) \in A$$
  est bien défini.
- Considérons alors l'application :
  $$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & a_n \end{array} \right.$$
  Elle est bien définie et injective car, par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite strictement croissante d'éléments de A. La surjectivité de f assurera que A est dénombrable.
- Soit $x \in A$. Introduisons l'ensemble $I_x := \{n \in \mathbf{N} \ : \ a_n \leqslant x\}$.
  — Comme $a_0 = \min(A)$ et $x \in A$, $a_0 \leqslant x$ et donc 0 appartient à I_x, qui est donc non vide.
  — Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite strictement croissante, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant a_n$ (cf. lemme pour les suites extraites). Nous en déduisons que $I_x \subset [\![0, x]\!]$.

  Des deux points précédents, nous déduisons que l'entier $n := \max(I_x)$ est bien défini par propriété de bon ordre. Comme $n \in I_x$ et $n + 1 \notin I_x$,
  $$a_0 < a_1 < \ldots < a_n \leqslant x < a_{n+1}$$
  Démontrons que $x = a_n = f(n)$ en raisonnant par l'absurde. Si $a_n \neq x$, alors $x \in A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$ et donc $x \geqslant a_{n+1} = \min\left(A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}\right)$. Contradiction.

□

Exemple 6. — D'après la proposition 5

1. l'ensemble $\{2n \ : \ n \in \mathbf{N}\}$ des entiers naturels pairs qui est infini
2. l'ensemble $\{2n + 1 \ : \ n \in \mathbf{N}\}$ des entiers naturels impairs qui est infini
3. l'ensemble des nombres premiers qui est infini (Euclide)

sont dénombrables.

Exemple 7. — L'ensemble
$$E := \{p \in \mathbf{N} \ : \ p \text{ est premier et } p \equiv 3\ [4]\}$$
est dénombrable. Pour l'établir, il suffit de démontrer que E est infini, d'après la proposition 5.
Raisonnons par l'absurde et supposons E fini. Notons $p_1 < \ldots < p_r$ ses éléments deux à deux distincts. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique l'entier,
$$n = 4 \prod_{i=1}^{r} p_i - 1$$
se décompose en produit de facteurs premiers. Il existe donc des nombres premiers $q_1, \ldots, q_s$ et des entiers naturels non nuls $m_1, \ldots, m_s$ tels que
$$n = \prod_{i=1}^{s} q_i^{m_i}$$

- Aucun des nombres $q_1, \ldots, q_s$ n'égale 2 car n est impair.
- Nous en déduisons que les classes des nombres $q_1, \ldots, q_s$ modulo 4 égalent celles de 1 ou 3. Si, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $q_i \equiv 1\ [4]$ alors
  $$n \equiv \prod_{i=1}^{s} q_i^{m_i} \equiv 1\ [4] \qquad \text{et} \qquad n \equiv 4 \prod_{i=1}^{r} p_i - 1 \equiv -1\ [4]$$
  d'où $1 \equiv -1\ [4]$, ce qui n'est pas. Ainsi, au moins un des nombres premiers $q_1, \ldots, q_s$ est congru à 3 modulo 4.
- Soit $i \in [\![1, s]\!]$. Le nombre q_i est distinct des nombres $p_1, \ldots, p_r$, sinon q_i diviserait 1.

Les deux derniers points contredisent le caractère exhaustif de la liste $(p_1, \ldots, p_r)$ des éléments de E.

1.3. Ensembles au plus dénombrables et parties de $\mathbf{N}$

Définition 8. — *Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Proposition 9. — *Soit E un ensemble. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *E est au plus dénombrable.*
2. *Il existe une partie A de $\mathbf{N}$ et une bijection $f\colon A \longrightarrow E$.*

Démonstration. On considère uniquement le cas où l'ensemble E n'est pas vide.

- Supposons E au plus dénombrable. Alors, il existe

$$A = \begin{cases} [\![1, n]\!] \ (n \in \mathbf{N}^*) & \text{si } E \text{ est fini} \\ \mathbf{N} & \text{si } E \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

  et une application $f\colon A \longrightarrow E$ bijective. L'assertion est démontrée.
- Supposons qu'il existe une partie A de $\mathbf{N}$ et une bijection $f\colon A \longrightarrow E$.
  - — Si A est fini, alors il existe une bijection $g\colon [\![1, \operatorname{card}(A)]\!] \longrightarrow A$. L'application

$$f \circ g\colon [\![1, \operatorname{card}(A)]\!] \longrightarrow E$$

    est bijective (comme composée d'applications bijectives). L'ensemble E est donc fini.
  - — Si A est infini, alors il existe une bijection $g\colon \mathbf{N} \longrightarrow A$, d'après la proposition 5. L'application

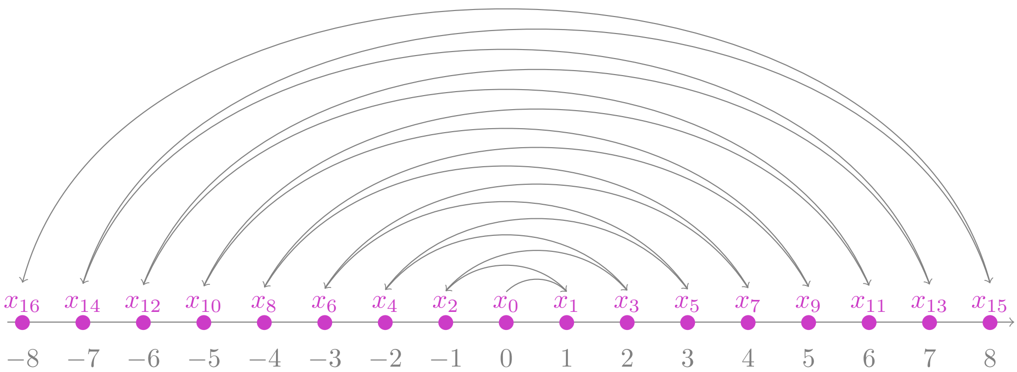
$$f \circ g\colon \mathbf{N} \longrightarrow E$$

    est bijective (comme composée d'applications bijectives). L'ensemble E est donc dénombrable.

$\square$

1.4. L'ensemble $\mathbf{Z}$ est dénombrable

Proposition 10. — *L'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs est dénombrable.*



Éléments de démonstration.

- On numérote les éléments de $\mathbf{Z}$ en commençant par affecter le numéro 0 à $0 \in \mathbf{Z}$, puis 1 à $1 \in \mathbf{Z}$, puis 2 à $-1 \in \mathbf{Z}$, puis 3 à $2 \in \mathbf{Z}$, puis 4 à $-2 \in \mathbf{Z}, \ldots$ en poursuivant indéfiniment ce jeu de « ping-pong ».
- On remarque que l'entier relatif portant le numéro n est $-n/2$ si n est pair et $(n+1)/2$ si n est impair. On observe également qu'un élément de $n \in \mathbf{Z}$ est numéroté $-2n$ si $n < 0$ et $2n - 1$ si $n \geqslant 0$. C'est ainsi qu'apparaissent les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -2n & \text{si } n \leqslant 0 \\ 2n - 1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

  Elles sont bien définies et on vérifie que
  - — pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(g(n)) = n$, en raisonnant par disjonction de cas suivant le signe de n ;
  - — pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g(f(n)) = n$ en raisonnant par disjonction de cas suivant la parité de n.

  Comme $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{Z}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$, l'application f est bijective.

$\square$

1.5. L'ensemble $\mathbf{N}^2$ est dénombrable

Lemme 11. — *Soit $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$. Alors*

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad \exists n_p \in \mathbf{N} \quad f(n_p) \leqslant p < f(n_p + 1)$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbf{N}$. L'ensemble

$$A_p := \{n \in \mathbf{N} \ : \ f(n) \leqslant p\}$$

contient 0 (car $f(0) = 0$) et est majoré par p (cf. lemme sur les suites extraites). Par propriété de bon ordre

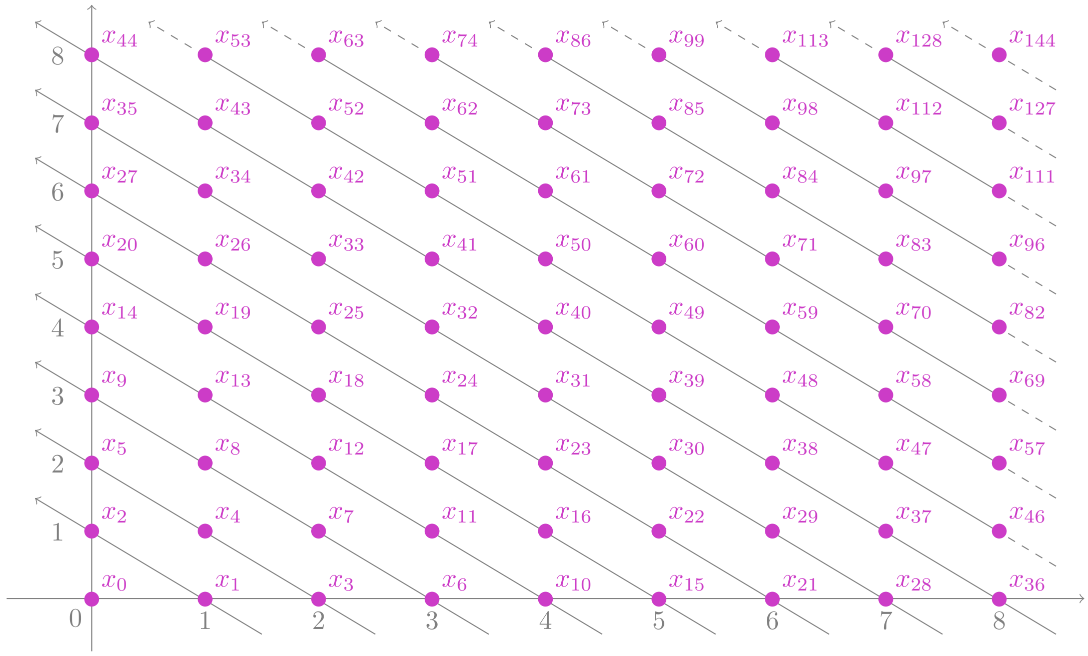
$$n_p := \max(A_p)$$

est bien défini. Comme $n_p \in A_p$ et $n_p + 1 \notin A_p$

$$f(n_p) \leqslant p < f(n_p + 1)$$

Remarquons qu'on peut démontrer que, de plus, l'entier n_p est unique. □

Proposition 12. — *L'ensemble $\mathbf{N}^2$ des couples d'entiers naturels est dénombrable.*



Éléments de démonstration.

- On numérote $(0,0)$ à 0, puis on serpente de manière diagonale à travers le réseau dessiné par $\mathbf{N}^2$ dans le plan. Après avoir numéroté tous les éléments d'une diagonale, on reprend la numérotation sur la diagonale suivante, en partant du bas pour remonter.
- On commence par observer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k+1$ points du réseau dessiné par $\mathbf{N}^2$ figurent sur la diagonale d'équation $y = -x + k$.
  Soit $(a,b) \in \mathbf{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ce point appartient à la droite d'équation $y = -x + a + b$. Sur les diagonales précédentes, $\displaystyle\sum_{k=0}^{a+b-1} (k+1) = \sum_{k=0}^{a+b} k$ points du réseau dessiné par $\mathbf{N}^2$ se sont déjà vus attribuer un numéro. Il faut encore en numéroter $b+1$ sur la diagonale d'équation $y = -x + a + b$ pour atteindre (a,b). Ainsi le point (a,b) sera le $\left(b + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{a+b} k\right)$-ième point du réseau dessiné par $\mathbf{N}^2$ recevant un numéro. Comme la numérotation débute à 0, il recevra le numéro $b + \displaystyle\sum_{k=0}^{a+b} k$.
  C'est ainsi qu'apparaît l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ (a,b) & \longmapsto & b + \displaystyle\sum_{k=0}^{a+b} k = b + \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2}. \end{array} \right.$$

  Nous allons démontrer que cette application est bijective, pour établir le caractère dénombrable de $\mathbf{Z}^2$.

- Soient $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbf{Z}^2$ deux couples distincts tels que

$$b_1 + \sum_{k=0}^{a_1+b_1} k = b_2 + \sum_{k=0}^{a_2+b_2} k$$

Quitte à échanger les deux couples $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$, on peut supposer que $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$. Nous observons que

$$b_1 + \sum_{k=0}^{a_1+b_1} k < a_1 + b_1 + 1 + \sum_{k=0}^{a_1+b_1} k = \sum_{k=0}^{a_1+b_1+1} k \leqslant \sum_{k=0}^{a_2+b_2} k \leqslant b_2 + \sum_{k=0}^{a_2+b_2} k$$

d'où une contradiction. L'application φ est donc injective.

- Soit $p \in \mathbf{N}$. L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \end{array} \right.$$

est strictement croissante et vérifie $f(0) = 0$. Nous pouvons donc lui appliquer le lemme 11 pour obtenir

$$\exists\, p \in \mathbf{N} \quad f(n_p) = \sum_{k=0}^{n_p} k \leqslant p < f(n_p + 1) = \sum_{k=0}^{n_p+1} k$$

Nous en déduisons que les nombres entiers

$$b_p := p - \sum_{k=0}^{n_p} k \qquad \text{et} \qquad a_p = n_p - b_p$$

sont positifs ou nuls. Nous pouvons donc considérer $\varphi(a_p, b_p)$, puis calculer

$$\varphi(a_p, b_p) = b_p + \sum_{k=0}^{a_p+b_p} k = p - \sum_{k=0}^{n_p} k + \sum_{k=0}^{n_p} k = p$$

L'application φ est donc surjective.

□

1.6. Produit cartésien fini d'ensembles au plus dénombrables

Rappel. — Soient $r \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_r$ des ensembles. On rappelle que le produit cartésien des ensembles $X_1, \ldots, X_r$ est l'ensemble $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} X_i$ formé des r-uplets $(x_1, \ldots, x_r)$ tels que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $x_i \in X_i$. Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on dispose naturellement d'une projection π_j de $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} X_i$ sur X_j définie par

$$\pi_j \left| \begin{array}{ccc} \displaystyle\prod_{i=1}^{r} X_i & \longrightarrow & X_j \\ (x_1, \ldots, x_r) & \longmapsto & x_j \end{array} \right.$$

Ainsi tout élément $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{r} X_i$ s'écrit-il également $(\pi_1(x), \ldots, \pi_r(x))$.

Proposition 13. — *Soient $r \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_r$ des ensembles au plus dénombrables. L'ensemble $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} X_i$ est au plus dénombrable.*

Exemple 14. — D'après les propositions 10 et 13, les ensembles $\mathbf{N}^3$, $\mathbf{Z}^{2025}$ et $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ sont dénombrables.

1.7. Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables

Proposition 15. — *Soient I un ensemble au plus dénombrable et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties au plus dénombrables d'un ensemble E. Alors l'ensemble*

$$\bigcup_{i\in I} X_i := \{x \in E \;:\; \exists\, i \in I \;:\; x \in X_i\}$$

est au plus dénombrable.

1.8. L'ensemble $\mathbf{Q}$ est dénombrable

Proposition 16. — *L'ensemble $\mathbf{Q}$ est dénombrable.*

1.9. Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable

Proposition 17. — *Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille sommable. Le support de la famille $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ défini par*

$$\mathfrak{S} := \{i \in I \;:\; u_i \neq 0\}$$

est au plus dénombrable. De plus $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in\mathfrak{S}} u_i$.

Éléments de démonstration. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. On démontre que

$$\mathfrak{S}_p := \left\{ i \in I \;:\; |u_i| \geqslant \frac{1}{p} \right\}.$$

est fini. On vérifie alors que $\mathfrak{S} = \displaystyle\bigcup_{p\in\mathbf{N}^*} \mathfrak{S}_p$ et on applique alors la proposition 15. □

Exercice 18. — Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}$.

1. Démontrer que les composantes connexes par arcs de U sont des intervalles ouverts.
2. Démontrer que l'ensemble des composantes connexes par arcs de U est au plus dénombrable.

Ainsi U est-il réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

1.10. Quelques ensembles non dénombrables

Le théorème suivant est dû à Cantor.

Théorème 19. — *Soit E un ensemble. Il n'existe aucune bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$.*

Éléments de démonstration. Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une bijection $f\colon E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, puis considérer la partie $A = \{x \in E \;:\; x \notin f(x)\}$ de E. □

Corollaire 20. — *L'ensemble $\mathcal{P}(N)$ n'est pas dénombrable.*

Corollaire 21. — *L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ n'est pas dénombrable.*

Éléments de démonstration. On définit les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ A & \longmapsto & (\mathbb{1}_A(n))_{n\in\mathbf{N}} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbf{N}) \\ (a_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & \{n \in \mathbf{N} \;:\; a_n = 1\} \end{array} \right.$$

On calcule $f \circ g$ et $g \circ f$, pour en déduire que les ensembles $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sont équipotents. Si $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ était dénombrable, $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ le serait, ce qui n'est pas (cf. corollaire 20). □

Théorème 22. — *L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable.*

Éléments de démonstration. On procède en plusieurs étapes, en suivant le sujet n°2 du concours CentraleSupélec 2019, filière MP.

1. On démontre que l'application
$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & [0,1] \\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{array} \right.$$
est bien définie et surjective. Cependant comme
$$\Psi((0,1,\ldots,1,\ldots)) = \Psi((1,0,\ldots,0,\ldots))$$
elle n'est pas injective.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
$$D_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \ : \ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \ \{0,1\}^n \right\}$$
$D = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} D_n$ et $D^* = D \setminus \{0\}$. On pose pour tout $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$:
$$\Lambda((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \begin{cases} \Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) & \text{si } \ \Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) \in [0,1[\setminus D^* \\ \dfrac{\Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}})}{2} & \text{si } \ \Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) \in D \cup \{1\} \ \text{ et } (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ stationnaire à } 1 \\ \dfrac{1+\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \ \Psi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) \in D^* \ \text{ et } (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ stationnaire à } 0 \end{cases}$$
et on prouve que Λ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sur $[0,1[$.
3. Ainsi, si $[0,1[$ était dénombrable, alors $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ le serait, ce qui n'est pas (cf. corollaire 21).

□

Corollaire 23. — *L'ensemble* $\mathbf{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une bijection $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{N}$. Nous en déduisons que l'application
$$g := f_{\,|\,[0,1[}^{\,|\,f([0,1[)} \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & f([0,1[) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$
est une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)$. Comme $f([0,1[)$ est une partie infinie de $\mathbf{N}$, elle est dénombrable. Il existe donc une bijection $h\colon \mathbf{N} \longrightarrow f([0,1[)$. Alors :
$$g^{-1} \circ h\colon \mathbf{N} \longrightarrow [0,1[$$
est une bijection (composée d'applications bijectives). Ainsi $[0,1[$ est-il dénombrable, ce qui n'est pas (proposition 22). □

Exercice 24. — Démontrer que l'ensemble $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.

Exercice 25. — Un nombre complexe z est dit
- algébrique s'il existe $P \in \mathbf{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(z) = 0$
- transcendant sinon.

On pose
$$\mathcal{A} := \{z \in \mathbf{C} \ : \ z \text{ est algébrique}\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T} := \{z \in \mathbf{C} \ : \ z \text{ est transcendant}\}$$
Démontrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est dénombrable et que l'ensemble $\mathcal{T}$ n'est pas dénombrable.

2. Tribu et espace probabilisable

2.1. Tribu sur un ensemble

Définition 26. — *Soit* Ω *un ensemble. Une partie* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est appelée tribu sur* Ω *si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*

(T1) $\mathcal{A}$ *contient l'ensemble vide, i.e.* $\varnothing \in \mathcal{A}$.

(T2) $\mathcal{A}$ *est stable par passage au complémentaire, i.e. pour tout* $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(T3) *$\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, i.e. pour tout $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Exemple 27. — Pour tout ensemble Ω, l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée tribu pleine. Il s'agit de la plus grande tribu sur Ω, pour la relation d'ordre donnée par l'inclusion.

Exemple 28. — Pour tout ensemble Ω, l'ensemble $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée tribu minimal. Il s'agit de la plus petite tribu sur Ω, pour la relation d'ordre donnée par l'inclusion.

Exemple 29. — Soit Ω un ensemble et soit A une partie de Ω. L'ensemble $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée tribu engendrée par A.

2.2. Espace Probabilisable

Définition 30. — *Un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable, si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.*

Proposition 31. — *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω.*

1. *$\Omega \in \mathcal{A}$*
2. *Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*
3. *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, alors $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$.*
4. *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{A}$.*
5. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.*
6. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.*

Définition 32. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.*

1. *L'ensemble Ω est appelé univers.*
2. *Un élément A de $\mathcal{A}$ est appelé événement.*
3. *L'événement $\varnothing$ est appelé événement impossible.*
4. *Les événements de la forme $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, i.e. les singletons appartenant à $\mathcal{A}$, sont appelés événements élémentaires.*
5. *Étant donné un événement A son complémentaire $\overline{A}$ est appelé événement contraire de A.*
6. *Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B$ est l'événement impossible, i.e. si $A \cap B = \varnothing$.*

Exercice 33. — Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille d'événements. Démontrer que les deux parties de Ω suivantes :

$$\limsup A_n := \{\omega \in \Omega \;:\; \forall n \in \mathbf{N},\ \exists p \geqslant n,\ \omega \in A_p\} \qquad \text{et} \qquad \liminf A_n := \{\omega \in \Omega \;:\; \exists n \in \mathbf{N},\ \forall p \geqslant n,\ \omega \in A_p\}$$

sont des événements.

Remarque 34. — Si Ω est un ensemble au plus dénombrable alors nous le munirons toujours de la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$ pour obtenir l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Remarque 35. — Nous pouvons penser à l'univers Ω comme à l'ensemble des issues/résultats ω d'une expérience aléatoire. Les éléments A de la tribu peuvent, quant à eux, être pensés comme les « regroupements d'issues » dont on aimerait définir/calculer la probabilité $\mathbf{P}(A)$. Cette année, nous considérerons des expériences aléatoires dont l'ensemble des résultats n'est pas nécessairement fini. Par exemple, dans un jeu de Pile ou Face, nous pourrons étudier le nombre de lancers nécessaires pour avoir un premier Pile. *A priori* l'ensemble Ω des issues possibles est $\mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$, qui est infini.

3. Probabilité et espace probabilisé

3.1. Definition d'une probabilité, d'un espace probabilisé

Définition 36. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une application*

$$\mathbf{P}\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

est appelée probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si
(a) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
(b) pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'événements deux-à-deux incompatibles, la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge et

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

La propriété (b) se nomme σ-additivité.

Définition 37. — *Une espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, où Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbf{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Remarque 38. — Si Ω est un ensemble fini et $\mathbf{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ est une application telle que
(a) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
(b) pour tout $(A_1, A_2) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ vérifiant $A \cap B = \varnothing$, $\mathbf{P}(A_1 \sqcup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)$
alors $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé. Les définitions 36 et 37 généralisent donc celles vues en MP2I.

3.2. Propriétés élémentaires d'une probabilité

Proposition 39. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*
1. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$
2. *Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des événements deux-à-deux incompatibles, alors*

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{P}(A_k)$$

3. *Si A est un événement , alors $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$.*

La propriété 2 se nomme additivité.

Proposition 40. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 \quad A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$$

Proposition 41. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*
1. *Si A et B sont des événements, alors*

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

2. *Soient $n \geqslant 2$ un entier et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Alors*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$$

3.3. Continuité croissante, continuité décroissante d'une probabilité

Théorème 42. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*
1. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements croissante pour l'inclusion (pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$). Alors*

$$\mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$$

2. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements décroissante pour l'inclusion (pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$). Alors*

$$\mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$$

3.4. Probabilité d'une réunion dénombrable, d'une intersection dénombrable

Corollaire 43. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilis et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements (sans monotonie particulière).*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \qquad et \qquad \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Exercice 44. — Un joueur lance indéfiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins un Pile ?

3.5. Sous-additivité de la probabilité pour une réunion dénombrable

Proposition 45. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements (non nécessairement deux à deux incompatibles). Alors*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n)$$

3.6. Lemme de Borel-Cantelli (HP)

Exercice 46. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $B_n := \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Démontrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Que dire de la suite $(\mathbf{P}(B_n))_{n\in\mathbf{N}}$?
2. Justifier que $\mathbf{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Que dire de $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$?
3. Nous considérons l'ensemble A formé des éléments $\omega \in \Omega$ tel qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que $\omega \in A_n$, i.e.
$$A := \{\omega \in \Omega \ : \ \text{l'ensemble } \{n \in \mathbf{N} \ : \ \omega \in A_n\} \text{ est infini}\}.$$
Démontrer que A est un événement, puis que $\mathbf{P}(A) = 0$.

3.7. Événement négligeable et événement presque sûr

Définition 47. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Un événement A est dit négligeable si $\mathbf{P}(A) = 0$.*
2. *Un événement A est dit presque sûr si $\mathbf{P}(A) = 1$.*

Proposition 48. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements négligeables. Alors l'événement $\bigcup_{i\in I} A_i$ est négligeable.*
2. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements presque sûrs. Alors l'événement $\bigcap_{i\in I} A_i$ est presque sûr.*

4. Probabilités conditionnelles

4.1. Définition d'une probabilité conditionnelle

Définition 49. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soient B un événement non négligeable et A un événement quelconque. La probabilité conditionnelle de A sachant B notée $\mathbf{P}(A \,|\, B)$ ou $\mathbf{P}_B(A)$ est définie par*
$$\mathbf{P}(A \,|\, B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$
2. *Soient B un événement négligeable et A un événement quelconque. On pose $\mathbf{P}(A \,|\, B) := 0$ par convention.*

4.2. Une probabilité conditionnelle est une probabilité

Proposition 50. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. et B un événement non négligeable. Alors l'application*

$$\mathbf{P}_B \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}(A \mid B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

4.3. Formule des probabilités composées

Théorème 51. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soient A, B des événements. Alors*
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B \mid A)$$
2. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Alors*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbf{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \ldots \times \mathbf{P}(A_{n-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \times \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Exercice 52. — Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne, en ajoutant une boule de la même couleur. On poursuit indéfiniment le procédé. Montrer qu'une boule rouge sera presque sûrement tirée.

4.4. Système quasi-complet d'événements

Définition 53. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ au plus dénombrable d'événements est appelée système d'événements si*

1. *les A_i sont deux à deux incompatibles, i.e. pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;*
2. *la réunion de tous les A_i est un événement presque sûr, i.e. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i) = 1$.*

Exemple 54. — Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit A un événement. Alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système quasi-complet d'événements.

Exemple 55. — Soit Ω un ensemble dénombrable, que l'on munit de sa tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système quasi-complet d'événements.

4.5. Formule des probabilités totales

Théorème 56. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B*

1. *la famille $(\mathbf{P}(B \mid A_i) \times \mathbf{P}(A_i))_{i \in I}$ est sommable*
2. $\mathbf{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(B \mid A_i) \times \mathbf{P}(A_i)$

Exercice 57. — On lance un dé non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. Si le dé a amené le chiffre k, alors on lance k fois une pièce équilibrée. Quelle la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile ?

Exercice 58. — Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient un 6, il tire une boule de l'urne. Sinon, on ajoute une boule noire dans l'urne et on rejoue à nouveau. Quelle est la probabilité que la boule rouge soit tirée ?

4.6. Formule de Bayes

Proposition 59. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soient A, B des événements, tous les deux non négligeables. Alors*

$$\mathbf{P}\left(A \,|\, B\right) = \mathbf{P}\left(B \,|\, A\right) \times \frac{\mathbf{P}\left(A\right)}{\mathbf{P}\left(B\right)}$$

2. *Soit $\left(A_i\right)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'événements, formé d'événements tous non négligeables. Pour tout événement B non négligeable et pour tout $i \in I$*

$$\mathbf{P}\left(A_i \,|\, B\right) = \frac{\mathbf{P}\left(B \,|\, A_i\right) \times \mathbf{P}\left(A_i\right)}{\displaystyle\sum_{j \in J} \mathbf{P}\left(B \,|\, A_j\right) \times \mathbf{P}\left(A_j\right)}$$

Exercice 60. — Vous êtes directeur de cabinet du Ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si elle a une réponse positive au test et commenter.

5. Événements indépendants

5.1. Indépendance de deux événements

Définition 61. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Deux événements A, B sont dits indépendants si*

$$\mathbf{P}\left(A \cap B\right) = \mathbf{P}\left(A\right) \times \mathbf{P}\left(B\right)$$

5.2. Indépendance de deux événements et événements contraires

Proposition 62. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient A, B deux événements indépendants, avec B non négligeable.*

1. $\mathbf{P}\left(A \,|\, B\right) = \mathbf{P}\left(A\right)$
2. *Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.*
3. *Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ dont indépendants.*

5.3. Événements mutuellement indépendants

Définition 63. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'événements. On dit que les événements A_i sont mutuellement indépendants si pour toute partie finie J de I*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}\left(A_i\right)$$

Des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants, comme l'illustre l'exercice précédent.

Exercice 64. — On considére l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et les événements A, B, C définis respectivement par

$A :=$ « le premier chiffre est pair » $\quad B :=$ « le deuxiéme chiffre est impair » $\quad C :=$ « la somme des chiffres est paire »

Démontrer que les événements A, B, C sont deux-à-deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

5.4. Événements mutuellement indépendants et événements contraires

Proposition 65. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Si $(B_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$ alors les événements $(B_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants.*

Si dans une famille d'événements mutuellement indépendants, on remplace certains des événements par leurs événements contraires alors la mutuelle indépendance est préservée.

Exercice 66. — On considère une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ lors d'un lancer. On lance indéfiniment cette pièce. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la probabilité d'obtenir Pile pour la première fois au n-ième lancer.

5.5. Distribution de probabilités discrète

Définition 67. — *Soit Ω un ensemble. Une distribution de probabilités discrète sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ d'éléments de nombres réels positifs ou nuls telle que*

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$$

Proposition 68. — *Soient Ω un ensemble et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrète sur Ω. Alors*

$$\operatorname{supp}(p_\omega)_{\omega\in\Omega} := \{\omega \in \Omega \ : \ p_\omega > 0\} \qquad [\textit{support de la distribution}]$$

est un ensemble au plus dénombrable.

5.6. Distribution de probabilités versus probabilité sur un ensemble au plus dénombrable

Théorème 69. — *Soit Ω un ensemble au plus dénombrable.*

1. *Si $\mathbf{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors $(\mathbf{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrète sur Ω.*
2. *Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrète sur Ω, alors l'application*

$$\mathbf{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array} \right.$$

est l'unique probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \mathbf{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

Exercice 70. — Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Posons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad p_n := e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

La famille $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels positifs est sommable de somme 1. D'après le théorème 69, il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}))$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(\{n\}) = p_n$. Calculer $\mathbf{P}(\{2n+1 \ : \ n \in \mathbf{N}\})$ et $\mathbf{P}(\{3n \ : \ n \in \mathbf{N}\})$.

Exercice 71. — Soit $p \in]0,1[$. Posons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad p_n := p\,(1-p)^{n-1}$$

La famille $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de réels positifs est sommable, de somme 1. D'après le théorème 69, il existe une unique probabilité $\mathcal{P}$ sur $(\mathbf{N}^*, \mathcal{P}(\mathbf{N}^*))$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(\{n\}) = p_n$. Calculer $\mathbf{P}(\{2n \ : \ n \in \mathbf{N}^*\})$.

6. Suite infinie de lancers de pièce, motivation de l'introduction des tribus

6.1. L'expérience aléatoire

Nous lançons indéfiniment une pièce équilibrée.

6.2. Modélisation d'une issue

Nous représentons une issue de cette expérience aléatoire par une suite

$$(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$$

où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\omega_n := \begin{cases} 1 & \text{si la pièce est retombée sur Face au } n\text{-ème lancer} \\ 0 & \text{si la pièce est retombée sur Pile au } n\text{-ème lancer} \end{cases}$$

6.3. Univers retenu

Nous choisissons donc $\Omega := \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ comme univers pour modéliser cette expérience.

6.4. Inversion du résultat obtenu au n-ième lancer

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons l'application « inversion du n-ième résultat », notée T_n, par

$$T_n \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (\omega_1, \omega_2, \ldots) & \longmapsto & (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 1-\omega_n, \omega_{n+1}, \ldots) \end{array} \right.$$

6.5. Non existence d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ invariante par inversion

Proposition 72. — *Il n'existe pas de probabilité* $\mathbf{P}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *vérifiant la propriété d'invariance suivante*

$$(\star) \qquad \forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}\left(T_n(A)\right) = \mathbf{P}\left(A\right)$$

qui reflète pour partie l'indépendance des différents lancers et le caractère équilibré de la pièce.

Démonstration.

- *Introduction d'une relation d'équivalence.* Nous définissons une relation d'équivalence sur Ω en posant

$$\forall\, \omega = (\omega_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \Omega \quad \forall\, \omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \Omega \quad \omega \sim \omega' \;:\Longleftrightarrow\; (\exists\, N \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, n \geqslant N \quad \omega_n = \omega'_n)$$

- *Choix d'un représentant dans chaque classe.*
  L'application :

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega/\sim \\ \omega & \longmapsto & \overline{\omega} \end{array} \right.$$

  est surjective. D'après l'axiome du choix, il existe une application

$$\sigma \colon \Omega/\sim \longrightarrow \Omega$$

  telle que, pour tout $C \in \Omega/\sim$, $\phi(\sigma(C)) = C$. Si on pose $A := \sigma(\Omega/\sim) \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors

$$\forall\, C \in \Omega/\sim \quad \exists!\, \omega \in A \quad C = \overline{\omega}$$

  L'ensemble A contient exactement un représentant de chaque classe d'équivalence.

- *Dénombrabilité de l'ensemble des parties finies de* $\mathbf{N}^*$*.* Notons

$$\mathcal{PF}(\mathbf{N}) := \{S \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \;:\; S \text{ est fini}\}$$

  Comme

$$\mathcal{PF}(\mathbf{N}) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathcal{P}([\![1,n]\!])$$

  l'ensemble $\mathcal{PF}(\mathbf{N})$ est dénombrable (union dénombrable d'ensembles finis).

- *Une écriture de* Ω *comme réunion dénombrable.* Les applications d'inversions T_n ($n \in \mathbf{N}^*$) commutant les unes avec les autres, on peut définir, pour tout $S \in \mathcal{PF}(\mathbf{N})$

$$T_S := \prod_{n\in S} T_n \qquad \text{[le produit est le produit de composition]}$$

  Nous démontrons que

$$\Omega := \bigsqcup_{S\in\mathcal{PF}(\mathbf{N})} T_S(A).$$

— Justifions que $\displaystyle\bigcup_{S\in\mathcal{PF}(\mathbf{N})} T_S(A) \subset \Omega$. Comme pour tout $A \in \mathcal{PF}(\mathbf{N})$, $T_S(A)$ est une partie de Ω, l'inclusion est claire.

— Démontrons que $\Omega \subset \displaystyle\bigcup_{S\in\mathcal{PF}(\mathbf{N})} T_S(A)$. Soit $\omega \in \Omega$. Il existe (un unique) $\omega' \in A$ tel que $\overline{\omega} = \overline{\omega'}$. Par suite $\omega \sim \omega'$. Nous en déduisons que l'ensemble

$$S' := \{n \in \mathbf{N}^* \;:\; \omega_n \neq \omega'_n\}$$

est fini. Nous observons alors que

$$\omega = T_{S'}(\omega') \in T_{S'}(A) \subset \bigcup_{S\in\mathcal{PF}(\mathbf{N})} T_S(A)$$

— Démontrons que l'union est disjointe. Soient S et S' deux parties finies de $\mathbf{N}$ telles que $T_S(A) \cap T_{S'}(A) \neq \varnothing$. Il existe donc $(\omega, \omega') \in A^2$ tel que

$$T_S(\omega) = T_{S'}(\omega')$$

Comme T_S ne modifie qu'un nombre fini de termes de la suite $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $T_{S'}$ ne modifie qu'un nombre fini de termes de la suite $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

$$\exists\, N \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqslant N, \quad \omega_n = \omega'_n$$

Ainsi $\omega \sim \omega'$. Nous en déduisons que $\overline{\omega} = \overline{\omega'}$, puis $\omega = \omega'$ car $(\omega, \omega') \in A^2$.
Comme $T_S(\omega) = T_{S'}(\omega')$, les indices n tels que ω_n est modifié en $1 - \omega_n$ par l'action de T_S sont les mêmes que les indices n tels que ω'_n est modifié en $1 - \omega'_n$ par l'action de $T_{S'}$. Ainsi $S = S'$.

- *Vers une contradiction.* Nous calculons

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & \mathbf{P}(\Omega) & \\ & = & \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigsqcup_{S\in\mathcal{PF}(\mathbf{N})} T_S(A)\right) & \text{[cf. écriture de } \Omega \text{ comme réunion dénombrable]} \\ & = & \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{PF}(\mathbf{N})} \mathbf{P}(T_S(A)) & [\sigma\text{-additivité de } \mathbf{P}] \\ & = & \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{PF}(\mathbf{N})} \mathbf{P}(A) & \text{[propriété d'invariance de } \mathbf{P} \text{ par inversion, cf. } (\star)] \end{array}$$

Que A soit ou non négligeable, nous obtenons une contradiction.

□

6.6. Modification de la tribu

Pour corriger le problème soulevé par la précédente proposition, on remplace la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ par une autre, nécessairement plus petite, mais contenant suffisamment de « parties intéressantes » pour la modélisation de l'expérience aléatoire. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\pi_n \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (\omega_k)_{k\in\mathbf{N}^*} & \longmapsto & \omega_n \end{array} \right.$$

Notons $\mathcal{A}$ la plus petite tribu sur Ω qui contient

$$\mathcal{G} := \left\{\pi_n^{-1}(\{b\}) \;:\; (n,b) \in \mathbf{N}^* \times \{0,1\}\right\}$$

que l'on peut construire comme étant l'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant l'ensemble $\mathcal{G}$ (une intersection de tribus sur Ω est une tribu sur Ω). Cette tribu $\mathcal{A}$ est stable par les applications d'inversions T_n ($n \in \mathbf{N}^*$), essentiellement car $\mathcal{G}$ l'est.

6.7. Définition de la probabilité

Le théorème d'extension de Kolmogorov (introduit plus tard, mais admis) assure qu'il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur l'espace de probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ vérifiant

$$\forall\,(n,b) \in \mathbf{N}^* \times \{0,1\} \quad \mathbf{P}\left(\pi_n^{-1}(\{b\})\right) = \frac{1}{2}$$

En outre, cette probabilité vérifie l'analogue de la propriété $(\star)$ suivant

$$\forall\, A \in \mathcal{A} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(T_n(A)) = \mathbf{P}(A)$$

qui découle essentiellement de l'unicité de la probabilité $\mathbf{P}$.

6.8. Conclusion

Nous disposons à présent d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ offrant un cadre théorique satisfaisant (e.g. la probabilité d'avoir Pile au n-ième lancer vaut $1/2$ ($n \in \mathbf{N}^*$)) pour appliquer les théorèmes des probabilités déjà démontrés. La difficulté réside dans la détermination/construction d'une tribu suffisamment grosse pour contenir des « parties intéressantes pour l'expérience aléatoire » mais pas trop pour que l'on soit en mesure de définir une probabilité. Ces questions délicates ne seront pas discutées ici. On supposera toujours qu'on dispose d'un espace probabilisé lié à notre modèle, mais on pourra garder à l'esprit que construire un tel n'est pas *a priori* chose aisée.

7. Variable aléatoire discrète et loi d'une telle

7.1. Rappels sur les images réciproques de parties

Soient Ω, E des ensembles et $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une application.

(a) Pour toute partie A de E, définit la partie $X^{-1}(A)$ de Ω par

$$X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in A\}$$

(b) L'ensemble des images des éléments de Ω par X est noté $X(\Omega)$, i.e.

$$X(\Omega) := \{X(\omega) \ : \ \omega \in \Omega\}$$

L'application

$$X^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\Omega) \\ A & \longmapsto & X^{-1}(A) \end{array} \right.$$

possède les propriétés suivantes.

(1) $X^{-1}(X(\Omega)) = \Omega$

(2) Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} X^{-1}(A_i)$$

(3) Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E deux à deux disjointes, les parties $X^{-1}(A_i)$ ($i \in I$) de Ω sont deux à deux disjointes et

$$X^{-1}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i\in I} X^{-1}(A_i)$$

(4) Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E

$$X^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} X^{-1}(A_i)$$

Soient F est un ensemble et $f\colon E \longrightarrow F$ une application.

(5) Pour toute partie B de F

$$(f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)$$

7.2. Définition d'une variable aléatoire discrète

Définition 73. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et E un ensemble. Une application $X\colon \Omega \longrightarrow E$ est appelée variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ si*

1. *l'ensemble $X(\Omega) := \{X(\omega) \ : \ \omega \in \Omega\}$ est au plus dénombrable ;*
2. *pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.*

7.3. Événements associés à une variable aléatoire discrète

Proposition 74. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*

1. *Soit $x \in E$. Alors*
$$(X = x) := X^{-1}(\{\omega\}) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$$
L'événement $(X = x)$ est également noté $\{X = x\}$.
2. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors*
$$(X \in A) := X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$$
L'événement $(X \in A)$ est également noté $\{X \in A\}$.

Exemple 75. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $x \in \mathbf{R}$. On pose

1. $(X \leqslant x) := X^{-1}(\,]-\infty, x]\,) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$;
2. $(X \geqslant x) := X^{-1}(\,[x, +\infty[\,) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$;
3. $(X < x) := X^{-1}(\,]-\infty, x[\,) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$;
4. $(X > x) := X^{-1}(\,]x, +\infty[\,) := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}$.

Les événements $(X \leqslant x)$, $(X \geqslant x)$, $(X < x)$ et $(X > x)$ sont également notés respectivement $\{X \leqslant x\}$, $\{X \geqslant x\}$, $\{X < x\}$ et $\{X > x\}$.

7.4. Loi d'une variable aléatoire discrète

Théorème 76. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble, et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. L'application*
$$\mathbf{P}_X \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}(X \in A) \end{array} \right.$$
est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$, appelée loi de X.

Proposition 77. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble, et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. La famille*
$$(\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$$
est une distribution de probabilités discrète sur $X(\Omega)$, qui détermine entièrement la loi de X
$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \quad \mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x)$$

Démonstration.

- Pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x) \geqslant 0$.
- Nous calculons
$$\Omega = X^{-1}(X(\Omega)) = X^{-1}\left(\bigsqcup_{x \in X(\Omega)} \{x\}\right) = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\})$$
Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, nous appliquons la σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$ pour obtenir
$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}\left(X^{-1}(\{x\})\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)$$
- Soit $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$. Comme A est une partie de $X(\Omega)$ au plus dénombrable, A est elle-même au plus dénombrable. Ainsi de
$$X^{-1}(A) = X^{-1}\left(\bigsqcup_{a \in A} \{a\}\right) = \bigsqcup_{a \in A} X^{-1}(\{a\})$$
et de la σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$, nous déduisons
$$\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{a \in A} X^{-1}(\{a\})\right) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}\left(X^{-1}(\{a\})\right) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a)$$

□

Remarque 78. — L'étude d'une variable aléatoire discrète consiste, pour partie, à déterminer sa loi. Souvent, l'espace probabilisé de départ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ n'apparaîtra que de manière implicite, et ne sera pas au cœur de l'étude.

7.5. Système quasi-complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète

Proposition 79. — *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé,* E *un ensemble, et* $X : \Omega \longrightarrow E$ *une variable aléatoire discrète définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$*. Alors*

$$((X = x))_{x \in X(\Omega)}$$

est un système quasi-complet d'événements.

Démonstration.

- Soit $(x_1, x_2) \in X(\Omega)^2$.

$$(X = x_1) \cap (X = x_2) = X^{-1}(\{x_1\}) \cap X^{-1}(\{x_2\}) = X^{-1}(\{x_1\} \cap \{x_2\}).$$

  Si $x_1 \neq x_2$, alors $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \varnothing$ et donc $(X = x_1) \cap (X = x_2) = \varnothing$.

- Nous observons

$$\bigsqcup_{x \in X(\Omega)} (X = x) = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\}) = X^{-1}\left(\bigsqcup_{x \in X(\Omega)} \{x\} \right) = X^{-1}(X(\Omega)) = \Omega$$

$\square$

7.6. Deux calculs de lois de variables aléatoires discrètes

Exercice 80. — On tire simultanément n boules dans une urne contenant a boules rouges et b boules vertes.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de boules rouges.
2. Justifier l'identité $\mathbf{P}(X \in [\![0, a]\!]) = 1$, puis l'expliciter.
3. Proposer une démonstration alternative de la formule observée en 2.

Exercice 81. — On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce retombant sur Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au rang d'apparition du premier Pile.
2. Justifier l'identité $\mathbf{P}(X \in \mathbf{N}^*) = 1$, puis l'expliciter.
3. Proposer une démonstration alternative de la formule observée en 2.

7.7. Convention pour la suite du chapitre

Nous ne considérerons dans la suite que des variables aléatoires discrètes. Ainsi, désormais, écrirons-nous « variable aléatoire » au lieu de « variable aléatoire discrète ».

7.8. Égalité en loi de deux variables aléatoires

Définition 82. — *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires (non nécessairement définies sur le même espace probabilisé). On dit que* X *et* Y *sont égales en loi et on note* $X \sim Y$*, si*

1. $X(\Omega) = Y(\Omega)$ *;*
2. *pour tout* $z \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = z) = \mathbf{P}(Y = z)$

autrement dit si les ensembles $X(\Omega) = Y(\Omega)$ *sont égaux et si les deux lois de probabilités* $\mathbf{P}_X$ *et* $\mathbf{P}_Y$ *sur* $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ *coïncident.*

Deux variables aléatoires égales en loi ne sont pas nécessairement égales (en tant qu'application), comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 83. — Soient X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y := 1 - X$. Démontrer que $X \sim Y$, bien que $X \neq Y$.

7.9. Variable aléatoire image

Théorème 84. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E, F deux ensembles, $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $f\colon X(\Omega) \longrightarrow F$ une application. Alors :*

1. *L'application $f(X) := f \circ X\colon \Omega \longrightarrow F$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*
2. *Pour tout $A \in \mathcal{P}(f(X(\Omega)))$*
$$\mathbf{P}_{f(X)}(A) = \mathbf{P}\left(X \in f^{-1}(A)\right)$$
et donc la loi de la variable aléatoire $f(X)$ est entièrement déterminée par la loi de la variable aléatoire X.

Démonstration.

- Nous observons que
$$f \circ X(\Omega) = f(X(\Omega))$$
Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, il existe une partie A de $\mathbf{N}$ et une application bijective $g\colon A \longrightarrow X(\Omega)$. L'application
$$h \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f \circ X(\Omega) \\ a & \longmapsto & f(g(a)) \end{array} \right.$$
est donc surjective. Il existe donc une application injective
$$i\colon f \circ X(\Omega) \longrightarrow A$$
Comme i induit une bijection de $f \circ X(\Omega)$ sur $i(f \circ X(\Omega))$, qui est une partie de $\mathbf{N}$, l'ensemble $f \circ X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
- Soit $y \in f \circ X(\Omega) = f(X(\Omega))$. Comme
$$(f \circ X)^{-1}(\{y\}) = X^{-1}\left(f^{-1}(\{y\})\right)$$
et $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, nous pouvons appliquer la proposition 74 pour obtenir
$$(f \circ X)^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$$
- Soit $A \in \mathcal{P}(f(X(\Omega)))$. Alors
$$\mathbf{P}_{f(X)}(A) := \mathbf{P}\left((f \circ X)^{-1}(A)\right) = \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(f^{-1}(A)\right)\right) =: \mathbf{P}\left(X \in f^{-1}(A)\right)$$

□

Corollaire 85. — *Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \sim Y$, F un ensemble et $f\colon X(\Omega) \longrightarrow F$ une application. Alors*
$$f(X) \sim f(Y)$$

7.10. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire

Définition 86. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, A un événement non négligeable, E un ensemble et $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. La loi conditionnelle de Y sachant A est la loi de X pour la probabilité $\mathbf{P}_A$, qui est définie par*
$$\forall\, B \subset X(\Omega) \quad \mathbf{P}\left(X \in B \,|\, A\right) = \frac{\mathbf{P}\left((X \in B) \cap A\right)}{\mathbf{P}\left(A\right)}$$

Exercice 87. — Soient $(n, p, q) \in \mathbf{N}^* \times]0, 1[\times]0, 1[$, X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que
$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad Y/(X = k) \sim \mathcal{B}(k, q)$$
Déterminer la loi de Y.

7.11. Couple de variables aléatoires

Définition 88. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E, F des ensembles et $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*

1. *La loi de la variable aléatoire*

$$Z = (X, Y) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est appelée loi conjointe de X et Y. Cette loi est entièrement déterminée par la distribution de probabilités

$$\left(\mathbf{P}\left(X = x \,,\, Y = y\right)\right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

sur l'ensemble au plus dénombrable $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

2. *Les lois de X et Y sont appelées lois marginales de $Z = (X, Y)$.*

Remarque 89. — Nous conservons les mêmes notations que dans la précédente définition. Nous avons affirmé que $Z = (X, Y)$ est une variable aléatoire, ce qui demande quelques vérifications.

1. Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables, dont $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ également. Comme :

$$Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

l'ensemble $Z(\Omega)$ est au plus dénombrable (une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable).

2. Soit $(x, y) \in Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

$$Z^{-1}\left(\{(x, y)\}\right) = \{\omega \in \Omega \;:\; (X(\omega), Y(\omega) = (x, y)\} = X^{-1}\left(\{x\}\right) \cap Y^{-1}\left(\{y\}\right).$$

Comme X et Y sont des variables aléatoires, $X^{-1}\left(\{x\}\right)$ et $Y^{-1}\left(\{y\}\right)$ appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$ et, par propriétés des tribus, leur intersection également.

Proposition 90. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, E, F des ensembles et $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Posons $Z = (X, Y)$.*

1. *Pour tout $x \in X(\Omega)$, la famille $\left(\mathbf{P}\left(Z = (x, y)\right)\right)_{y \in Y(\Omega)}$ est sommable et*

$$\mathbf{P}\left(X = x\right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}\left(Z = (x, y)\right)$$

2. *Pour tout $y \in Y(\Omega)$, la famille $\left(\mathbf{P}\left(Z = (x, y)\right)\right)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et*

$$\mathbf{P}\left(Y = y\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}\left(Z = (x, y)\right)$$

La loi de Z détermine donc entièrement les lois de X et Y.

Les lois marginales ne déterminent pas nécessairement la loi conjointe, i.e. connaître les lois des variables aléatoires X et Y ne suffit pas *a priori* pour savoir la loi du couple $Z = (X, Y)$, cf. exemple ci-dessous.

Exemple 91. — Considérons quatre variables aléatoires X_1, Y_1, X_2, Y_2 à valeurs dans $\{0, 1\}$ tels que les lois des couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) soient donnés par les tables ci-dessous.

Loi du couple (X_1, Y_1)

$\mathbf{P}\left(X_1 = 0 \,,\, Y_1 = 0\right) = \dfrac{1}{4}$	$\mathbf{P}\left(X_1 = 0 \,,\, Y_1 = 1\right) = \dfrac{1}{4}$
$\mathbf{P}\left(X_1 = 1 \,,\, Y_1 = 0\right) = \dfrac{1}{4}$	$\mathbf{P}\left(X_1 = 1 \,,\, Y_1 = 1\right) = \dfrac{1}{4}$

Loi du couple (X_2, Y_2)

$\mathbf{P}\left(X_2 = 0 \,,\, Y_2 = 0\right) = \dfrac{1}{6}$	$\mathbf{P}\left(X_2 = 0 \,,\, Y_2 = 1\right) = \dfrac{1}{3}$
$\mathbf{P}\left(X_2 = 1 \,,\, Y_2 = 0\right) = \dfrac{1}{3}$	$\mathbf{P}\left(X_2 = 1 \,,\, Y_2 = 1\right) = \dfrac{1}{6}$

Les variables aléatoires X_1, Y_1, X_2, Y_2 sont de Bernoulli et nous calculons

$$\mathbf{P}\left(X_1 = 1\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = 1 \,,\, Y_1 = 0\right) + \mathbf{P}\left(X_1 = 1 \,,\, Y_1 = 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}\left(Y_1=1\right)=\mathbf{P}\left(Y_1=1\,,\,X_1=0\right)+\mathbf{P}\left(Y_1=1\,,\,X_1=1\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}\left(X_2=1\right)=\mathbf{P}\left(X_2=1\,,\,Y_2=0\right)+\mathbf{P}\left(X_2=1\,,\,Y_2=1\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}\left(Y_2=1\right)=\mathbf{P}\left(Y_2=1\,,\,X_2=0\right)+\mathbf{P}\left(Y_2=1\,,\,X_2=1\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

Ainsi

$$X_1\sim\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)\quad,\quad Y_1\sim\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)\quad,\quad X_2\sim\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)\quad,\quad Y_2\sim\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Bien que $X_1\sim X_2$ et $Y_1\sim Y_2$, les couples (X_1,Y_1) et (X_2,Y_2) ont des lois différentes.

Exercice 92. — Soient X,Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que

$$(\star)\quad\forall\,(i,j)\in\mathbf{N}^2\quad\mathbf{P}\left(X=i,Y=j\right)=\frac{1}{e\,2^{i+1}\,j!}$$

1. Vérifier que $(\star)$ définit bien une loi pour le couple (X,Y).
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Calculer $\mathbf{P}\left(X=Y\right)$.

Exercice 93. — Soient $p\in]0,1[$ et X,Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par

$$\forall\,(k,n)\in\mathbf{N}^2\quad\mathbf{P}\left(X=k,Y=n\right)=\begin{cases}\dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k\leqslant n\\ \quad 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois de X et Y.

7.12. Loi conjointe de n variables aléatoires

Définition 94. — *Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé, $E_1,\ldots,E_n$ des ensembles et des variables aléatoires*

$$X_1\colon\Omega\longrightarrow E_1\;,\;\ldots\;,\;X_n\colon\Omega\longrightarrow E_n$$

définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$.

1. *La loi de la variable aléatoire discrète $Z=(X_1,\ldots,X_n)$ est appelée loi conjointe des variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$. Cette loi est entièrement déterminée par la distribution de probabilités :*

$$\left(\mathbf{P}\left(X_1=x_1\,,\,\ldots\,,\,X_n=x_n\right)\right)_{(x_1,\ldots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\ldots\times X_n(\Omega)}$$

   sur l'ensemble au plus dénombrable $X_1(\Omega)\times\ldots\times X_n(\Omega)$.
2. *Les lois des variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont appelées lois marginales de Z.*

8. Indépendance de variables aléatoires

8.1. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 95. — *Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé et X,Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$. On dit que X et Y sont indépendantes et on note $X\perp\!\!\!\perp Y$ si*

$$\forall\,(A,B)\in\mathcal{P}(X(\Omega))\times\mathcal{P}(Y(\Omega))\quad\mathbf{P}\left(X\in A\,,\,Y\in B\right)=\mathbf{P}\left(X\in A\right)\times\mathbf{P}\left(Y\in B\right)$$

Proposition 96. — *Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé et X,Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$. Alors*

$$X\perp\!\!\!\perp Y\quad\Longleftrightarrow\quad\forall\,(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\quad\mathbf{P}\left(X=x\,,\,Y=y\right)=\mathbf{P}\left(X=x\right)\times\mathbf{P}\left(Y=y\right)$$

8.2. Indépendance d'un nombre fini de variables aléatoires

Définition 97. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si*

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \ldots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega)) \quad \mathbf{P}\left(X_1 \in A_1 \,, \, \ldots \,, \, X_n \in A_n\right) = \mathbf{P}\left(X_1 \in A_1\right) \times \ldots \times \mathbf{P}\left(X_n \in A_n\right)$$

Proposition 98. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \quad \mathbf{P}\left(X_1 = x_1 \,, \, \ldots \,, \, X_n = x_n\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = x_1\right) \times \ldots \times \mathbf{P}\left(X_n = x_n\right)$$

Exercice 99. — Soient $n, m \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$. Démontrer que $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 100. — Soient E, F deux ensembles non vides et X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telles que $X \sim \mathcal{U}(E)$, $Y \sim \mathcal{U}(F)$. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $(X, Y) \sim \mathcal{U}(E \times F)$.

8.3. Indépendance d'une famille quelconque de variables aléatoires

Définition 101. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que les variables aléatoires X_i $(i \in I)$ sont indépendantes si pour toute partie finie $J \subset I$, les variables aléatoires $(X_j)_{j \in J}$, en nombre fini, sont indépendantes au sens de la définition 97.*

8.4. Images de variables aléatoires indépendantes

Proposition 102. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et, pour tout $i \in I$, une application f_i de $X_i(\Omega)$ vers un ensemble E_i. Si les variables aléatoires X_i $(i \in I)$ sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f_i(X_i)$ $(i \in I)$ sont indépendantes.*

8.5. Lemme des coalitions

Lemme 103. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$, $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, E, F des ensembles et deux applications*

$$f \colon X_1(\Omega) \times \ldots \times X_m(\Omega) \longrightarrow E \qquad , \qquad g \colon X_{m+1}(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \longrightarrow F$$

Si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors

$$f(X_1, \ldots, X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$$

8.6. Théorème d'extension de Kolmogorov

Théorème 104. — *Soient E un ensemble au plus dénombrable et $\mathcal{L}$ une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi $\mathcal{L}$.*

C'est souvent ce théorème que nous appliquerons pour obtenir un cadre théorique, dans les situations où nous répéterons indéfiniment un jeu (e.g. le lancer d'une pièce, le lancer d'un dé).

9. Loi de Poisson

9.1. Définition de la loi de Poisson

Définition 105. — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ, où $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si*

1. $X(\Omega) = \mathbf{N}$
2. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}\left(X = n\right) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$

Remarque 106. — Fixons $\lambda > 0$.

- La famille $\left(e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille de réels positifs ou nuls.
- Nous savons que la série $\sum e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^n}{n!}$ est absolument convergente, de somme donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\,e^{\lambda} = 1$$

La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est donc bien une loi.

9.2. La loi exponentielle est une loi limite (HP)

Remarque 107. — Il n'y a pas de situation typique pour reconnaître une loi de Poisson. Cette dernière apparaît comme « une loi limite ». Toutefois, la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est souvent utilisée pour modéliser des événements rares, i.e. des événements dont la réalisation dans un laps de temps T donné suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec p « petit », de l'ordre de λ/n, avec « n grand ». L'exercice précise cette idée.

Exercice 108. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. Supposons qu'il existe une constante réelle $\lambda > 0$ telle que

$$n\,p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$ fixé

$$\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

9.3. Sélection d'exercices sur la loi de Poisson

Exercice 109. — Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Supposons $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, où $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^*$. Démontrer que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 110. — Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.

Exercice 111. — Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour quelle valeur de $n \in \mathbf{N}$ la probabilité $\mathbf{P}(X = n)$ est-elle maximale ?
2. À $n \in \mathbf{N}$ fixé, pour quelle valeur de λ la probabilité $\mathbf{P}(X = n)$ est-elle maximale ?

10. Loi géométrique

10.1. Heuristique pour la loi géométrique

(a) On considère une expérience de Bernoulli, i.e. une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues : 0 (échec) et 1 (succès). La probabilité de succès est notée p ($p \in]0, 1]$). On répète cette expérience de Bernoulli une infinité de fois, de manière indépendante.

(b) On note X la variable aléatoire égale au rang du premier succès.

(c) L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$.

(d) Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n le résultat obtenu lors de la n-ième expérience de Bernoulli. Toutes les variables aléatoires X_n suivent la loi $\mathcal{B}(p)$ et elles sont indépendantes, car les répétitions des expériences de Bernoulli le sont. En outre, les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ permettent d'exprimer la variable X

$$X = \min\{n \in \mathbf{N}^* \ : \ X_n = 1\} \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$$

(e) Nous observons que $(X=1)=(X_1=1)$ et donc

$$\mathbf{P}\left(X=1\right)=\mathbf{P}\left(X_1=1\right)=p$$

(f) Soit n un entier tel que $n\geqslant 2$. Comme

$$(X=n)=(X_1=0\,,\,\ldots\,,\,X_{n-1}=0\,,\,X_n=1)$$

il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(X=n\right) &= \mathbf{P}\left(X_1=0\,,\,\ldots\,,\,X_{n-1}=0\,,\,X_n=1\right)\\
&= \mathbf{P}\left(X_1=0\right)\,\ldots\,\mathbf{P}\left(X_{n-1}=0\right)\,\mathbf{P}\left(X_n=1\right) \qquad \text{[les v.a. } X_1,\ldots,X_n \text{ sont indépendantes]}\\
&= \underbrace{(1-p)\,\ldots\,(1-p)}_{n-1\text{ facteurs}}\,p \qquad \text{[les v.a. } X_1,\ldots,X_n \text{ suivent toutes la loi } \mathcal{B}(p)\text{]}\\
&= (1-p)^{n-1}\,p
\end{aligned}$$

(g) Les résultats obtenus en (e) et (f) s'unifient en

$$\forall\, n\in\mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}\left(X=n\right)=(1-p)^{n-1}\,p$$

(h) De la σ-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$ et des résultats sur les séries géométriques $(-1<1-p<1)$, nous déduisons

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(X=+\infty\right) &= 1-\mathbf{P}\left(X\neq+\infty\right)\\
&= 1-\mathbf{P}\left(X\in\mathbf{N}^*\right)\\
&= 1-\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\mathbf{P}\left(X=n\right)\\
&= 1-p\sum_{n\in\mathbf{N}^*}(1-p)^{n-1}\\
&= 1-p\times\frac{1}{1-(1-p)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

L'événement $(X=+\infty)$ est donc négligeable.

Comme $(X=+\infty)$ est négligeable, nous considérerons que l'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\mathbf{N}^*$.

10.2. Définition de la loi géométrique

Définition 112. — *Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé, $X:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p, où $p\in\,]0,1]$, et on note $X\sim\mathcal{G}(p)$, si*

1. $X(\Omega)=\mathbf{N}^*$
2. $\forall\, n\in\mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}\left(X=n\right)=p\,(1-p)^{n-1}$

10.3. Situation de reconnaissance d'une loi géométrique

De l'heuristique présentée dans la partie 10.1, nous déduisons la proposition suivante.

Proposition 113. — *Si l'on répète indéfiniment une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 pour un échec et 1 pour un succès) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire égale au rang du premier succès, alors $X\sim\mathcal{G}(p)$, où $p\in\,]0,1[$ est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli.*

10.4. Absence de mémoire pour une loi géométrique (HP)

Exercice 114. — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire si

$$\text{(AM)} \qquad \forall (k,n) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}\left(X > n+k \mid X > n\right) = \mathbf{P}\left(X > k\right)$$

1. Supposons que $X \sim \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0,1[$. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}\left(X > n\right)$$

   et en déduire que X vérifie la propriété (AM).
2. En considérant la situation de reconnaissance d'une loi géométrique, expliquer au moyen de quelques phrases l'absence de mémoire pour une telle loi, en motivant la terminologie retenue pour la propriété (AM).
3. On suppose que X vérifie la propriété d'absence de mémoire (AM). Démontrer que X suit une loi géométrique.

10.5. Sélection d'exercices sur la loi géométrique

Exercice 115. — On jette une infinité de fois un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de 5 obtenus lors des 20 premiers lancers. Quelle est la loi de X_1 ?
2. On note X_2 le chiffre obtenu lors du $100^{\text{ème}}$ lancer. Quelle est la loi de X_2 ?
3. On note X_3 le rang du premier lancer où le dé a amené un multiple de 3. Quelle est la loi de X_3 ?
4. On note X_4 la variable aléatoire égale à 1 si le $50^{\text{ème}}$ lancer a amené un nombre pair et égale à 0 sinon. Quelle est la loi de X_4 ?

Exercice 116. — Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0,1]$. Démontrer que la variable $\min(X,Y)$ suit une loi géométrique.

Exercice 117. — Soient $\lambda > 0$ et $p \in]0,1[$. Soient X, Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$. Calculer $\mathbf{P}\left(X = Y\right)$.

Exercice 118. — Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?