

Espaces vectoriels normés 3

- 1. Applications linéaires continues 1
 - 1.1. Caractérisation des applications linéaires continues 1
 - 1.2. Opérations sur les applications linéaires continues 2
 - 1.3. Norme subordonnée d'une application linéaire continue 2
 - 1.4. Inégalités pour les normes subordonnées d'applications linéaires continues 3
 - 1.5. Applications multilinéaires continues 3
- 2. Comparaison de normes 4
 - 2.1. Définition de deux normes équivalentes 5
 - 2.2. Caractérisation séquentielle de l'équivalence de deux normes 5
 - 2.3. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente 6
- 3. Espaces vectoriels normés de dimension finie 7
 - 3.1. Équivalence des normes sur un espace de dimension finie 7
 - 3.2. Caractère intrinsèque des notions topologiques sur un espace de dimension finie 7
 - 3.3. Convergence des suites dans un espace de dimension finie 8
 - 3.4. Compacité dans un espace de dimension finie 8
 - 3.5. Suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence dans un espace de dimension finie 9
 - 3.6. Caractère fermé d'un sous-espace de dimension finie 9
 - 3.7. Applications linéaires entre deux espaces de dimension finie 10
 - 3.8. Norme subordonnée d'une matrice carrée 10
 - 3.9. Inégalités pour les normes subordonnées de matrices carrées 10
 - 3.10. Continuité des applications polynomiales sur un espace de dimension finie 11
 - 3.11. Applications multilinéaires sur un produit d'espaces de dimension finie 11

Notation. — Dans ce chapitre, n, p sont des entiers naturels non nuls et \mathbf{K} désigne le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

1. Applications linéaires continues

1.1. Caractérisation des applications linéaires continues

Théorème 1. — Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les cinq assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application u est continue sur E .
2. L'application u est continue en 0.
3. La restriction de u à la boule unité fermée est bornée.
4. $\exists C > 0 \quad \forall x \in E \quad \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$
5. L'application u est lipschitzienne.

En pratique, pour démontrer que l'application linéaire $u: (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$ est continue, on pourra considérer un vecteur x de E et chercher une constante réelle C , indépendante de x , telle que

$$\|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

Exemple 2. — Toute application linéaire

$$u: (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$$

est continue. En effet, si nous notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{K}^n , alors, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$

$$\|u(x)\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_\infty} \|u(e_i)\|_\infty \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|_\infty \right)}_{\text{constante indépendante de } x} \|x\|_\infty$$

Exemple 3. — Soient $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un \mathbf{R} -espace vectoriel E , de norme associée $\|\cdot\|$, et $x \in E$ fixé. l'application

$$\langle x, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} (E, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ y \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $y \in E$

$$|\langle x, \cdot \rangle(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \underbrace{\|x\|}_{\text{constante indépendante de } y} \|y\|$$

Exemple 4. — L'application

$$\text{Eval}_2 \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}[X], \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ P & \longmapsto & P(2) \end{array} \right.$$

n'est pas continue car elle n'est pas bornée sur la boule unité fermée de $(\mathbf{R}[X], \|\cdot\|_1)$. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X^n \in S(0, 1) \subset \overline{B(0, 1)}$ et $\text{Eval}_2(X^n) = 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 5. — Démontrer que l'application linéaire

$$\text{Eval}_0 \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

est continue si l'on munit $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais discontinue si l'on munit $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$.



En pratique, pour démontrer que l'application linéaire $u: (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$ n'est pas continue, on pourra chercher une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_E} 0_E \quad \text{et} \quad u(x_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_F} u(0_E) = 0_F$$

On aura ainsi établi la négation du critère séquentiel de continuité de u en 0_E .

Exercice 6. — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\varphi: E \longrightarrow \mathbf{K}$ une forme linéaire non nulle.

1. Démontrer que le noyau de φ est soit fermé dans E , soit dense dans E .
2. Démontrer que l'application φ est continue si et seulement si $\text{Ker}(\varphi)$ est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|)$.

1.2. Opérations sur les applications linéaires continues

Notation. — Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, on pose

$$\mathcal{L}_c(E, F) := \{f \in F^E : \text{l'application } f \text{ est linéaire et continue}\} = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}^0(E, F)$$

Théorème 7. — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés.

1. Pour tout $u, v \in \mathcal{L}_c(E, F)$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}_c(E, F)$.
2. Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, pour tout $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$.

1.3. Norme subordonnée d'une application linéaire continue

Proposition 8. — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On appelle norme subordonnée de u à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ le nombre réel

$$\| \| u \| \| := \sup \{ \| u(x) \|_F : x \in E \text{ et } \| x \|_E \leq 1 \}$$

L'application

$$\| \| \cdot \| \| \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E, F) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ u & \longmapsto & \| \| u \| \| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Remarque 9. — En conservant les notations de la proposition 8 et en supposant $E \neq \{0_E\}$, nous avons

$$\| \| u \| \| := \sup_{x \in \overline{B(0_E, 1)}} \| u(x) \|_F = \sup_{x \in S(0_E, 1)} \| u(x) \|_F \quad [\text{définition alternative de la norme subordonnée}]$$

Exercice 10. — Calculer la norme subordonnée de l'application linéaire continue

$$u \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, 3x + 4y) \end{array} \right.$$

et généraliser.

Exercice 11. — Démontrer que l'application

$$\text{Eval}_0 \left| \begin{array}{ccc} (C^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

est linéaire et calculer $\|\|\text{Eval}_0\|\|$.

Exercice 12. — Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ et $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ sa matrice dans la base canonique.

1. Démontrer que l'application linéaire $u: (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est continue et calculer sa norme subordonnée.
2. Démontrer que l'application linéaire $u: (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1)$ est continue et calculer sa norme subordonnée.

1.4. Inégalités pour les normes subordonnées d'applications linéaires continues

Proposition 13. — Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F) \quad \forall x \in E \quad \|u(x)\|_F \leq \|\|u\|\| \|x\|_E$$

💡 | La norme subordonnée $\|\|u\|\|$ d'une application linéaire $u: (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ peut être vue comme « la meilleure constante de Lipschitz » pour l'application u .

Théorème 14. — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}_c(E)^2 \quad \|\|u \circ v\|\| \leq \|\|u\|\| \|\|v\|\| \quad [\text{sous-multiplicativité de la norme } \|\cdot\|]$$

1.5. Applications multilinéaires continues

Proposition 15. — Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés et $B: E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. L'application B est continue si et seulement si

$$\exists C > 0 \quad \forall (x, y) \in E \times F \quad \|B(x, y)\|_G \leq C \|x\|_E \|y\|_F$$

Démonstration. Rappelons que la norme placée sur $E \times F$ est la norme produit $\|\cdot\|$, définie par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|(x, y)\| := \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$$

Procédons par double implication.

⇒ Supposons l'application B continue. Alors B est continue en tout point de $E \times F$, en particulier continue au point $(0_E, 0_F)$. Remarquons que, B étant bilinéaire, $B(0_E, 0_F) = 0_G$. Dans la définition de la continuité de B en $(0_E, 0_F)$, nous spécifions ε à $1 > 0$ pour obtenir qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$

$$\underbrace{\|(x, y)\| \leq \alpha}_{\|(x, y) - (0_E, 0_F)\| \leq \alpha} \implies \underbrace{\|B(x, y)\|_G \leq 1}_{\|B(x, y) - B(0_E, 0_F)\|_G \leq 1}$$

Nous scindons alors l'étude en deux parties suivant que les vecteurs x et y s'annulent ou non.

- Soient x un vecteur de E non nul et y un vecteur de F non nul. Alors le vecteur $\left(\frac{\alpha}{\|x\|_E} x, \frac{\alpha}{\|y\|_F} y\right)$ de $E \times F$ a une norme $\|\cdot\|$ égale à α . Donc

$$\left\| B\left(\frac{\alpha}{\|x\|_E} x, \frac{\alpha}{\|y\|_F} y\right) \right\|_G \leq 1$$

En utilisant la bilinéarité de B , l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_G$ et le fait que $\alpha, \|x\|_E$ et $\|y\|_F$ sont strictement positifs, nous en déduisons

$$\|B(x, y)\|_G \leq \frac{1}{\alpha^2} \|x\|_E \|y\|_F \tag{1}$$

- Si $(x, y) \in E \times F$ est tel que $x = 0_E$ ou $y = 0_F$, alors la bilinéarité de B livre $B(x, y) = 0_G$. L'inégalité (1) s'étend donc à tous les vecteurs (x, y) de $E \times F$.

⊞ Supposons qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \|B(x, y)\|_G \leq C \|x\|_E \|y\|_F$$

Soient $(x, y) \in E \times F$. Démontrons que B est continue en (x, y) , en appliquant le critère séquentiel de continuité. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $E \times F$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} (x, y)$$

D'après le cours sur les convergences des suites dans un espace produit

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_E} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_F} y$$

Soient $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} \|B(x_n, y_n) - B(x, y)\|_G &\leq \|B(x_n, y_n) - B(x_n, y)\|_G + \|B(x_n, y) - B(x, y)\|_G && \text{[inégalité triangulaire]} \\ &= \|B(x_n, y_n - y)\|_G + \|B(x_n - x, y)\|_G && \text{[} B \text{ est bilinéaire]} \\ &\leq C \|x_n\|_E \|y_n - y\|_F + C \|x_n - x\|_E \|y\|_F && \text{[cf. hypothèse]} \end{aligned}$$

Comme toute norme est continue (puisque 1-lipschitzienne d'après la seconde inégalité triangulaire)

$$C \|x_n\|_E \|y_n - y\|_F + C \|x_n - x\|_E \|y\|_F \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} C \times \|x\|_E \times 0 + C \times 0 \times \|y\|_F = 0$$

D'après le théorème d'encadrement, $\|B(x_n, y_n) - B(x, y)\|_G \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, i.e. $B(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_G} B(x, y)$. □

Exemple 16. — Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

L'application bilinéaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} (E, \|\cdot\|) \times (E, \|\cdot\|) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est donc continue.

Proposition 17. — Soient un entier $p \geq 2$, $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_p, \|\cdot\|_{E_p})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés et :

$$f: E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$$

une application multilinéaire. L'application f est continue si et seulement si

$$\exists C > 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \quad \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_p\|_{E_p}$$

Exercice 18. — Démontrer que l'application

$$\det \left| \begin{array}{l} (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ M \longmapsto \det(M) \end{array} \right.$$

est continue.

2. Comparaison de normes

Notation. — La lettre E désigne un \mathbf{K} -espace vectoriel.

2.1. Définition de deux normes équivalentes

Définition 19. — Soient N_1 et N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 est équivalente à N_2 si

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0} \quad \forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Proposition 20. — La relation \mathcal{R} , définie sur l'ensemble des normes sur E par, pour toutes normes N_1 et N_2 sur E

$$N_1 \mathcal{R} N_2 \quad :\iff \quad N_1 \text{ est équivalente à } N_2$$

est une relation d'équivalence.

Exemple 21. — On considère les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies précédemment sur \mathbf{R}^n , où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. *Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur \mathbf{R}^n .* Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Nous calculons :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| |x_j| \geq \sum_{i=1}^n x_i^2$$

et en déduisons que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^n

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| \times 1 = \langle (|x_1|, \dots, |x_n|), (1, \dots, 1) \rangle \leq \|x\|_2 \cdot \|(1, \dots, 1)\|_2 = \sqrt{n} \|x\|_2$$

Ainsi

$$\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_2 \quad [\text{inégalités optimales}]$$

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont donc équivalentes sur \mathbf{R}^n .

2. *Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{R}^n .* Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$0 \leq |x_i| \leq \|x\|_\infty$$

et donc

$$\|x\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \|x\|_\infty$$

Ainsi

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq n \|\cdot\|_\infty \quad [\text{inégalités optimales}]$$

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont donc équivalentes sur \mathbf{R}^n .

3. *Comparaison des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{R}^n .* Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$0 \leq x_i^2 \leq \|x\|_\infty^2$$

et donc

$$\|x\|_\infty^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n \|x\|_\infty^2$$

Ainsi

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_\infty \quad [\text{inégalités optimales}]$$

Les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont donc équivalentes sur \mathbf{R}^n , ce que l'on pouvait déduire des points 1 et 2.

2.2. Caractérisation séquentielle de l'équivalence de deux normes

Notation. — Les lettres N_1 et N_2 désignent deux normes sur E .

Théorème 22. — Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists \alpha \in \mathbf{R}_{>0} \quad \forall x \in E \quad N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$

2. L'application

$$\text{id}_{N_1}^{N_2} \left| \begin{array}{ccc} (E, N_1) & \longrightarrow & (E, N_2) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

est continue.

3. Toute suite d'éléments de E qui converge vers 0_E pour la norme N_1 , converge vers 0_E pour la norme N_2 .

Corollaire 23. — Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de E :

$$(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } 0_E \text{ pour la norme } N_1 \iff (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } 0_E \text{ pour la norme } N_2.$$

 Ce corollaire peut être utilisé pour démontrer que deux normes sur un même espace vectoriel ne sont pas équivalentes.

Exercice 24. — Démontrer que sur $\mathbf{R}[X]$:

1. les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ ne sont pas équivalentes ;
2. les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes ;
3. les normes $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 25. — Soient a et b des réels tels que $a < b$. Démontrer que sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$:

1. les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ ne sont pas équivalentes ;
2. les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes ;
3. les normes $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2.3. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente

Notation. — Les lettres N_1 et N_2 désignent deux normes sur E .

Théorème 26. — On suppose que

$$\exists \alpha \in \mathbf{R}_{>0} \quad \forall x \in E \quad N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$$

et on considère une partie A de E .

1. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, pour tout $\ell \in \mathbf{R}$

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_1} \ell \implies x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_2} \ell$$

2. Si A est ouverte pour la norme N_2 alors elle est ouverte pour la norme N_1 .
3. Si A est fermée pour la norme N_2 alors elle est fermée pour la norme N_1 .
4. Si A est bornée pour la norme N_1 alors elle est bornée pour la norme N_2 .
5. Si A est compacte pour la norme N_1 alors elle est compacte pour la norme N_2 .
6. L'adhérence de A pour la norme N_1 est incluse dans l'adhérence de A pour la norme N_2 .
7. L'intérieur de A pour la norme N_2 est incluse dans l'intérieur de A pour la norme N_1 .

Corollaire 27. — On suppose que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes et on considère une partie A de E .

1. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$, pour tout $\ell \in \mathbf{R}$

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_1} \ell \iff x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_2} \ell$$

2. La partie A est ouverte pour la norme N_1 si et seulement si elle est ouverte pour la norme N_2 .
3. La partie A est fermée pour la norme N_1 si et seulement si elle est fermée pour la norme N_2 .
4. La partie A est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2 .
5. La partie A est compacte pour la norme N_1 si et seulement si elle est compacte pour la norme N_2 .
6. L'adhérence de A pour la norme N_1 coïncide avec l'adhérence de A pour la norme N_2 .
7. La partie A est dense dans E pour la norme N_1 si et seulement si elle est dense dans E pour la norme N_2 .
8. L'intérieur de A pour la norme N_1 coïncide avec l'intérieur de A pour la norme N_2 .
9. La frontière de A pour la norme N_1 coïncide avec la frontière de A pour la norme N_2 .

Éléments de démonstration. Le corollaire 27 est conséquence directe du théorème 26. On propose toutefois une démonstration indépendante pour l'assertion 2.

Par hypothèse

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

L'application linéaire

$$\text{id}_{N_1}^{N_2} \left| \begin{array}{ccc} (E, N_1) & \longrightarrow & (E, N_2) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

est β -lipschitzienne, donc continue. Par suite si U_2 est un ouvert de E pour la norme N_2

$$\left(\text{id}_{N_1}^{N_2} \right)^{-1} (U_2) = U_2$$

est un ouvert de E pour la norme N_1 . De même, l'application linéaire

$$\text{id}_{N_2}^{N_1} \left| \begin{array}{ccc} (E, N_2) & \longrightarrow & (E, N_1) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

est $\frac{1}{\alpha}$ -lipschitzienne, donc continue. Par suite si U_1 est un ouvert de E pour la norme N_1

$$\left(\text{id}_{N_2}^{N_1} \right)^{-1} (U_1) = U_1$$

est un ouvert de E pour la norme N_2 . □

 Pour étudier une propriété topologique sur un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$, on peut donc remplacer la norme $\|\cdot\|_E$ par une autre norme sur E qui est équivalente à $\|\cdot\|_E$.

Corollaire 28. — Soient F un \mathbf{K} -espace vectoriel, $\|\cdot\|_E, N_E$ deux normes équivalentes sur E , $\|\cdot\|_F, N_F$ deux normes équivalentes sur F et $f: E \longrightarrow F$ une application. Alors

$$f: (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F) \text{ est continue} \iff f: (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F) \text{ est continue}$$

3. Espaces vectoriels normés de dimension finie

3.1. Équivalence des normes sur un espace de dimension finie

Théorème 29. — Toutes les normes sur un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Démonstration. Cf. exercice 9 de la feuille d'exercices « Espaces vectoriels normés 2 ». □

3.2. Caractère intrinsèque des notions topologiques sur un espace de dimension finie

Corollaire 30. — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel normé de dimension finie.

1. La convergence d'une suite de vecteurs de E , ainsi que sa limite éventuelle, ne dépendent pas de la norme placée sur E .
2. La notion de partie ouverte de E ne dépend pas de la norme placée sur E .
3. La notion de partie fermée de E ne dépend pas de la norme placée sur E .
4. La notion de partie bornée de E ne dépend pas de la norme placée sur E .
5. La notion de partie compacte de E ne dépend pas de la norme placée sur E .
6. La notion d'adhérence d'une partie de E ne dépend pas de la norme placée sur E .
7. La notion de partie dense dans E ne dépend pas de la norme placée sur E .
8. La notion d'intérieur d'une partie de E ne dépend pas de la norme placée sur E .
9. La notion de frontière d'une partie de E ne dépend pas de la norme placée sur E .

Remarque 31. — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors

$$N_{\mathcal{B}} \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \longmapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| \end{array} \right.$$

est une norme sur E . Aussi existe-t-il une norme sur E .

2. Puisque les propriétés topologiques de E ne dépendent pas de la norme placée sur E , on n'indique généralement pas quelle norme on considère sur E . Par exemple, si une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de E converge vers un vecteur ℓ de E , on note

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} \ell \quad [\text{sans mentionner de norme}]$$

💡 Pour étudier une propriété topologique sur un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie E , on peut considérer la norme de notre choix sur E . Cette souplesse est parfois commode, à condition d'avoir une certaine culture des normes existantes, sur des espaces de dimension finie par exemple.

Corollaire 32. — Soient E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie. La continuité d'une application de E vers F ne dépend pas des normes placées sur E et F .

3.3. Convergence des suites dans un espace de dimension finie

Notation. — On considère un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie E et une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

Proposition 33. — Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit e_i^* comme étant l'unique forme linéaire sur E telle que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

i.e.

$$e_i^* \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{K} \\ \sum_{j=1}^n x_j e_j \longmapsto x_i \end{array} \right. \quad [\text{application } i\text{-ème coordonnée dans la base } \mathcal{B}]$$

Alors $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$, appelée base duale de la base \mathcal{B} .

Proposition 34. — Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in E$.

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} \ell \iff \underbrace{\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e_i^*(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbf{K}} e_i^*(\ell) \right)}_{\text{convergence coordonnée par coordonnée dans la base } \mathcal{B}}$$

3.4. Compacité dans un espace de dimension finie

Théorème 35. — Soit A une partie d'un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie E . Alors

$$A \text{ est compacte} \iff A \text{ est fermée et bornée.}$$

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . On considère la norme N_{∞} sur E définie par

$$N_{\infty} \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \longmapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |e_i^*(x)| \end{array} \right.$$

Les applications

$$f \left| \begin{array}{l} (E, N_{\infty}) \longrightarrow (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_{\infty}) \\ x \longmapsto (e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{l} (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_{\infty}) \longrightarrow (E, N_{\infty}) \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array} \right.$$

sont des isométries réciproques d'une de l'autre. Elles sont en particuliers continues, puisque 1-lipschitziennes. Soit A une partie fermée et bornée de E (pour toute norme sur E , en particulier pour la norme N_{∞}). Comme f est une

isométrie, $f(A)$ est une partie fermée et bornée de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Nous savons alors que $f(A)$ est une partie compacte de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (cf. polycopié de cours « Espaces vectoriels normés 2 »). Nous en déduisons que

$$A = g(f(A))$$

est une partie compacte de (E, N_∞) , comme image continue d'un compact. □

Exemple 36. — Le groupe orthogonal

$$O_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A^\top A = I_n\}$$

est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. D'après le théorème 35, il suffit de montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (pour une norme quelconque, puisque toutes sont équivalentes).

- *Caractère borné de $O_n(\mathbf{R})$.* Considérons le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et sa norme $\|\cdot\|$ associée

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) \longmapsto \text{tr}(A^\top B) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \|\cdot\| \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ A \longmapsto \sqrt{\langle A, A \rangle} \end{array} \right.$$

Comme toute matrice de $O_n(\mathbf{R})$ a norme \sqrt{n} , $O_n(\mathbf{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- *Caractère fermé de $O_n(\mathbf{R})$.* Considérons les applications

$$\Delta \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A \longmapsto (A, A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad B \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ (A, B) \longmapsto A^\top B \end{array} \right.$$

L'application Δ est linéaire entre espaces de dimension finie, donc continue. L'application B est bilinéaire entre espaces de dimension finie, donc continue. Ainsi

$$O_n(\mathbf{R}) = (B \circ \Delta)^{-1}(\{I_n\})$$

est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par l'application continue $B \circ \Delta$.

3.5. Suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence dans un espace de dimension finie

Théorème 37. — Soit E un \mathbf{K} -espace de dimension finie et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite bornée de vecteurs de E . Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence dans E alors elle converge dans E .

3.6. Caractère fermé d'un sous-espace de dimension finie

Théorème 38. — Soient (E, N) un \mathbf{K} -espace vectoriel normé (non nécessairement de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors F est une partie fermée de E .

Démonstration. Notons N_F la norme sur F induite par la norme N sur E , i.e.

$$N_F \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \longmapsto N(x) \end{array} \right.$$

Soient $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de F et x un vecteur de E tels que

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} x \tag{2}$$

Nous démontrons que $x \in F$ (caractérisation séquentielle des fermés).

La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc bornée, i.e.

$$\exists R > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \underbrace{N(x_n)}_{N_F(x_n)} \leq R$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \in \{y \in F : N_F(y) \leq R\} = \overline{B_{N_F}(0, R)} \quad [\text{boule fermée dans } F \text{ pour la norme } N_F]$$

Comme F est un espace de dimension finie, le théorème 35 nous livre que la partie $\overline{B_{N_F}(0, R)}$ est compacte (pour la norme N_F ou pour toute norme sur F). Il existe donc une application $\varphi: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $x_F \in F$ tels que

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_F \text{ ou } N} x_F \tag{3}$$

Or (2) implique

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} x \tag{4}$$

De (3), (4) et de l'unicité de la limite, nous déduisons que $x = x_F \in F$. □



Un sous-espace vectoriel F d'un \mathbf{K} -espace vectoriel normé (E, N) n'est pas nécessairement fermé. En effet, si $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, $N = \| \cdot \|_1$ alors la forme linéaire non nulle

$$\text{Eval}_0 \left| \begin{array}{l} (E, N) \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \longmapsto f(0) \end{array} \right.$$

est discontinue (exercice 5). Ainsi $F := \text{Ker}(\text{Eval}_0)$ est un hyperplan de E qui est dense dans E (exercice 6) donc non fermé dans E .

3.7. Applications linéaires entre deux espaces de dimension finie

Théorème 39. — *Toute application linéaire entre deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie est continue.*

Démonstration. Soient E et F sont deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Soient (e_1, \dots, e_n) une base de E et (f_1, \dots, f_m) une base de F . On considère les normes N_E sur E et N_F sur F définies par

$$N_E \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \longmapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |e_i^*(x)| \end{array} \right. \quad \text{et} \quad N_F \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ y \longmapsto \max_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} |f_j^*(y)| \end{array} \right.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout vecteur $x \in E$

$$N_F(u(x)) = N_F \left(u \left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i \right) \right) = N_F \left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) u(e_i) \right) \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{|e_i^*(x)|}_{\leq N_E(x)} N_F(u(e_i)) \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n N_F(u(e_i)) \right)}_{\text{indépendant de } x} N_E(x)$$

L'application u est donc continue. □

Corollaire 40. — *Si E et F sont deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie*

$$\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F).$$

3.8. Norme subordonnée d'une matrice carrée

Proposition 41. — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.*

1. *L'application*

$$\varphi_A \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X \longmapsto AX \end{array} \right.$$

est continue.

2. *On appelle norme subordonnée de A à la norme $\| \cdot \|$ le nombre réel*

$$\| \| A \| \| := \| \| \varphi_A \| \| := \sup \{ \| AX \| : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ et } \| X \| \leq 1 \} = \sup \{ \| AX \| : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ et } \| X \| = 1 \}$$

3. *L'application*

$$\| \| \cdot \| \| \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ A \longmapsto \| \| A \| \| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3.9. Inégalités pour les normes subordonnées de matrices carrées

Corollaire 42. — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.*

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \| AX \| \leq \| \| A \| \| \| X \|$

2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2 \quad \| \| AB \| \| \leq \| \| A \| \| \| \| B \| \| \quad [\text{sous-multiplicativité de la norme } \| \cdot \|]$

Exercice 43. — Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\underbrace{\rho(M)}_{\text{rayon spectral}} := \max \{ |\lambda| : \lambda \in \text{Spec}_{\mathbf{R}}(M) \} < 1$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$. Démontrer que

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\| \cdot \|_{\infty}} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$$

3.10. Continuité des applications polynomiales sur un espace de dimension finie

Théorème 44. — Soient un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(a_{i_1, \dots, i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n}$ une famille presque nulle d'éléments de \mathbf{K} . Alors l'application polynomiale

$$f \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} e_1^*(x)^{i_1} \dots e_n^*(x)^{i_n} \in \mathbf{K}$$

est continue.

Démonstration. On s'appuie sur la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $x \in E$ et $(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{E} x$$

D'après la proposition 33

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e_i^*(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{K}} e_i^*(x)$$

Par théorème d'opérations sur les limites de suites convergentes dans \mathbf{K}

$$f(x_k) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} e_1^*(x_k)^{i_1} \dots e_n^*(x_k)^{i_n} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{K}} \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} e_1^*(x)^{i_1} \dots e_n^*(x)^{i_n} = f(x)$$

□

Corollaire 45. — L'application déterminant

$$\det \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \\ A \longmapsto \end{array} \right. \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) [A]_{1, \sigma(1)} \dots [A]_{n, \sigma(n)} \in \mathbf{K}$$

est continue.

3.11. Applications multilinéaires sur un produit d'espaces de dimension finie

Théorème 46. — Soient E_1, \dots, E_n des \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie et si $(F, \|\cdot\|)$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel normé, alors toute application multilinéaire $f: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ est continue.

Corollaire 47. — L'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \\ (A, B) \longmapsto \end{array} \right. \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

$$AB$$

est continue.

Corollaire 48. — Soient E, F, G des \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \\ (v, u) \longmapsto \end{array} \right. \mathcal{L}(E, G)$$

$$v \circ u$$

est continue.