

Espaces vectoriels normés 2

- 1. Complément sur la notion de valeur d'adhérence 1
- 2. Compacité 3
 - 2.1. Propriété de Bolzano-Weierstraß et définition de la compacité 3
 - 2.2. Une partie compacte est fermée et bornée 3
 - 2.3. Caractérisation des parties compactes de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 4
 - 2.4. Caractérisation des parties compactes de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ 5
 - 2.5. Un fermé relatif d'un compact est compact 5
 - 2.6. CNS de convergence pour une suite d'éléments d'un compact 6
 - 2.7. Produit d'un nombre fini de compacts 6
- 3. Applications continues sur une partie compacte 7
 - 3.1. Image continue d'un compact 7
 - 3.2. Théorème des bornes atteintes 7
 - 3.3. Théorème de Heine 8
- 4. Connexité par arcs 8
 - 4.1. Arc joignant deux points 8
 - 4.2. Partie connexe par arcs 9
 - 4.3. Les parties convexes sont connexes par arcs 9
 - 4.4. Les parties étoilées sont connexes par arcs 9
 - 4.5. Composantes connexes par arcs 9
 - 4.6. Caractérisation des parties connexes par arcs de \mathbf{R} 10
 - 4.7. Image continue d'une partie connexe par arcs 10
 - 4.8. Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires 10

Notation. — Dans ce chapitre, \mathbf{K} désigne le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} et $(E, \|\cdot\|_E)$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel normé.

1. Complément sur la notion de valeur d'adhérence

Définition 1. — Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et x un vecteur de E . On dit que x est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers x , i.e. si

$$\exists \varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \nearrow \quad u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

 | La proposition suivante éclaire le concept de valeur d'adhérence et fournit des outils pratiques pour étudier les valeurs d'adhérence d'une suite.

Proposition 2. — Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et x un vecteur de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Le vecteur x est une valeur de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists n \geq N \quad \|u_n - x\| \leq \varepsilon$ [comparer à la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers x]
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble d'indices $\{n \in \mathbf{N} : \|u_n - x\| \leq \varepsilon\}$ est infini.

Démonstration.

(a) *L'implication 1 \implies 2.* Supposons que x soit une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Alors il existe une application $\varphi: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \tag{1}$$

Soient un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $N \geq 0$. D'après (1)

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|u_{\varphi(n)} - x\| \leq \varepsilon \tag{2}$$

Posons $n = \varphi(\max\{N, n_0\}) \geq \max\{N, n_0\} \geq N$. Comme $\max\{N, n_0\} \geq n_0$, nous déduisons de (2) l'inégalité

$$\|u_n - x\| \leq \varepsilon$$

- (b) *L'implication 2 \implies 3.* Nous raisonnons par contraposée et supposons qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble d'indices $\{n \in \mathbf{N} : \|u_n - x\| \leq \varepsilon\}$ est fini. Une partie finie de \mathbf{N} étant majorée, il existe un entier $N \geq 1$ tel que

$$\{n \in \mathbf{N} : \|u_n - x\| \leq \varepsilon\} \subset \llbracket 0, N-1 \rrbracket$$

Donc, pour tout $n \geq N$, $\|u_n - x\| > \varepsilon$. Nous avons démontré que

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad \|u_n - x\| > \varepsilon$$

La négation de l'assertion 2 est donc établie.

- (c) *L'implication 3 \implies 1.* Nous supposons l'assertion (3) vraie et construisons par récurrence une suite d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n \in \mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\varphi(n) < \varphi(n+1) \quad \text{et} \quad \|u_{\varphi(n)} - x\| \leq \frac{1}{n+1}$$

- *Initialisation.* D'après (3), l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} : \|u_n - x\| \leq 1\}$ est infini, donc non vide. Soit $\varphi(0)$ un élément de cet ensemble, de sorte que

$$\varphi(0) \in \mathbf{N} \quad \text{et} \quad \|u_{\varphi(0)} - x\| \leq \frac{1}{0+1}$$

Toujours d'après (3), l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N} : \|u_n - x\| \leq \frac{1}{2}\right\}$ est infini, donc

$$\left\{n \in \mathbf{N} : \|u_n - x\| \leq \frac{1}{2}\right\} \not\subset \llbracket 0, \varphi(0) \rrbracket$$

Il existe donc un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que

$$\|u_{\varphi(1)} - x\| \leq \frac{1}{1+1}$$

Nous avons construit deux entiers naturels $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ tels que $\varphi(0) < \varphi(1)$ et

$$\forall k \in \{0, 1\} \quad \|u_{\varphi(k)} - x\| \leq \frac{1}{k+1}$$

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons construits des entiers naturels $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ tels que $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ et

$$\forall k \in \{0, n\} \quad \|u_{\varphi(k)} - x\| \leq \frac{1}{k+1}$$

D'après (3), l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N} : \|u_n - x\| \leq \frac{1}{n+2}\right\}$ est infini, donc

$$\left\{n \in \mathbf{N} : \|u_n - x\| \leq \frac{1}{n+2}\right\} \not\subset \llbracket 0, \varphi(n) \rrbracket$$

Il existe donc un entier $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que

$$\|u_{\varphi(n+1)} - x\| \leq \frac{1}{n+1+1}$$

Nous disposons à présent d'entiers naturels $\varphi(0), \dots, \varphi(n), \varphi(n+1)$ tels que $\varphi(0) < \dots < \varphi(n) < \varphi(n+1)$ et

$$\forall k \in \{0, n+1\} \quad \|u_{\varphi(k)} - x\| \leq \frac{1}{k+1}$$

À cette suite d'entiers $(\varphi(n))_{n \in \mathbf{N}}$ nous associons l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \\ n \longmapsto \varphi(n) \end{array} \right.$$

qui est, par construction, strictement croissante. De plus

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \|u_{\varphi(n)} - x\| \leq \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème d'encadrement, $\|u_{\varphi(n)} - x\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} 0_{\mathbf{R}}$, i.e. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} x$.

□

Exercice 3. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un intervalle de \mathbf{R} .

2. Compacité

Notation. — $(E, \| \cdot \|_E)$ désigne un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

2.1. Propriété de Bolzano-Weierstraß et définition de la compacité

Définition 4. — On dit que A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstraß si toute suite d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A , i.e. si

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \quad \exists a \in A \quad \exists \varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \nearrow \nearrow \quad a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$$

Définition 5. — On dit que A est une partie compacte de $(E, \| \cdot \|_E)$ si A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstraß.

Exemple 6. — Une partie finie de E est compacte. Plus généralement, une union finie de parties compactes de E est compacte.

2.2. Une partie compacte est fermée et bornée

Proposition 7. — Si A est un compact, alors A est fermé et borné.

♥ Une démonstration de la proposition 7 est à connaître.

Exercice 8. — Soit un entier $n \geq 2$. Justifier que $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas une partie compacte de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \| \cdot \|_{\infty})$.

 Une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel normé n'est pas nécessairement compacte, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 9. — Considérons l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}[X], \| \cdot \|_{\infty})$ et sa sphère unité $S(0, 1)$.

1. La suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(0, 1)^{\mathbf{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence dans $S(0, 1)$. Démontrons le en raisonnant pas l'absurde. Supposons donc qu'il existe une application $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et un polynôme $P \in S(0, 1)$ tels que

$$X^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\| \cdot \|_{\infty}} P$$

Alors pour tout $n > \deg P$, $\varphi(n) \geq n > \deg P$ et donc

$$1 = \left| \left[X^{\varphi(n)} - P \right]_{\varphi(n)} \right| \leq \| X^{\varphi(n)} - P \|_{\infty}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons $1 \leq 0$. Contradiction.

2. D'après 1, $S(0, 1)$, qui est une partie fermée et bornée de $(\mathbf{R}[X], \| \cdot \|_{\infty})$, n'est pas compacte.

Exercice 10. — Considérons l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{R}), \| \cdot \|_{\infty})$ et sa boule unité fermée $\overline{B(0, 1)}$.

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \overline{B(0, 1)}^{\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sin(nx) \end{array} \right.$$

n'a pas de valeur d'adhérence dans $\overline{B(0, 1)}$.

2. Qu'en déduire pour la boule unité fermée $\overline{B(0, 1)}$?

Exercice 11. — Munissons le \mathbf{R} -espace vectoriel $\ell^{\infty}(\mathbf{R}) := \{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée} \}$ de la norme :

$$\| \cdot \|_{\infty} \left| \begin{array}{l} \ell^{\infty}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \longmapsto \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|. \end{array} \right.$$

Démontrer que la boule unité fermée de $(\ell^{\infty}(\mathbf{R}), \| \cdot \|_{\infty})$ n'est pas compacte.

2.3. Caractérisation des parties compactes de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$

Notation. — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Proposition 12. — *Toute suite bornée de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ possède une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Nous ne considérons que le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et raisonnons par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

- *Initialisation* à $n = 1$. L'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}^1, \|\cdot\|_\infty)$ coïncide avec $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Le théorème de Bolzano-Weierstraß livre le résultat.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que, toute suite bornée de $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ possède une valeur d'adhérence. Soit $(u_k = (u_{1,k}, \dots, u_{n,k}, u_{n+1,k}))_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $(\mathbf{R}^{n+1}, \|\cdot\|_\infty)$, qui est bornée. Ainsi

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \|(u_{1,k}, \dots, u_{n,k}, u_{n+1,k})\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n+1} |u_{i,k}| \leq M \tag{3}$$

— De (3), nous déduisons

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \max_{1 \leq i \leq n} |u_{i,k}| \leq \max_{1 \leq i \leq n+1} |u_{i,k}| \leq M$$

La suite $((u_{1,k}, \dots, u_{n,k}))_{k \in \mathbf{N}}$ est donc une suite d'éléments de $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ qui est bornée. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une application $\varphi: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $(u_{1,\varphi(k)}, \dots, u_{n,\varphi(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} (x_1, \dots, x_n)$, i.e.

$$u_{1,\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{|\cdot|} x_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad u_{n,\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{|\cdot|} x_n \tag{4}$$

— D'après (3)

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad |u_{n+1,\varphi(k)}| \leq \max_{1 \leq i \leq n+1} |u_{i,\varphi(k)}| \leq M$$

La suite $(u_{n+1,\varphi(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ de nombres réels est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une application $\psi: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $x_{n+1} \in \mathbf{R}$ tels que

$$u_{n+1,\varphi(\psi(k))} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{|\cdot|} x_{n+1} \tag{5}$$

— De (4) et (5), nous déduisons

$$u_{1,\varphi \circ \psi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{|\cdot|} x_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad u_{n,\varphi \circ \psi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{|\cdot|} x_n \quad , \quad u_{n+1,\varphi \circ \psi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{|\cdot|} x_{n+1}$$

i.e.

$$u_{\varphi \circ \psi(k)} = (u_{1,\varphi \circ \psi(k)}, \dots, u_{n,\varphi \circ \psi(k)}, u_{n+1,\varphi \circ \psi(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

□

Théorème 13. — *Une partie de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Démonstration. L'implication directe a déjà été établie (cf. proposition 7). Pour démontrer l'implication réciproque, nous considérons une partie A de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, qui est fermée et bornée. Démontrons que A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstraß. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A .

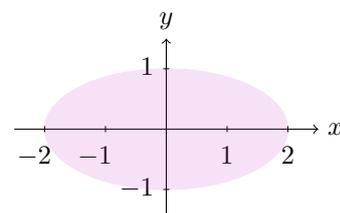
- Comme A est bornée, la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est également bornée. D'après la proposition 12, il existe une application $\varphi: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ et un vecteur x de \mathbf{R}^n tels que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.
- Comme A est fermée et que les termes de la suite convergente $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ appartiennent à A , $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\varphi(n)} \in A$.

□

Exercice 14. — Démontrer que la partie

$$K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.



Exercice 15. — Soient K une partie compacte de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

1. Soit r un réel strictement positif. Démontrer que

$$K_r := \bigcup_{x \in K} \overline{B(x, r)}$$

est compact.

2. Démontrer qu'il existe $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$ tel que

(a) $K \subset \overline{B(a, r)}$;

(b) pour tout $(a', r') \in E \times \mathbf{R}_{>0}$ tel que $K \subset \overline{B(a', r')}$, $r \leq r'$.

Il existe donc une boule fermée de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ de rayon minimal qui contient K .

2.4. Caractérisation des parties compactes de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$

Notation. — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Corollaire 16. — Une partie de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration. L'application

$$f \left| \begin{array}{l} (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{K}^{n^2}, \|\cdot\|_\infty) \\ M \longmapsto ([M]_{1,1}, \dots, [M]_{1,n}, [M]_{2,1}, \dots, [M]_{2,n}, \dots, [M]_{n,1}, \dots, [M]_{n,n}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme qui préserve les normes, i.e.

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \|f(M)\|_\infty = \|M\|_\infty$$

Une partie A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est donc bornée (resp. fermée, compacte) si et seulement si la partie $f(A)$ de \mathbf{K}^{n^2} est bornée (resp. fermée, compacte). Le résultat est donc conséquence du théorème 13. \square

Exercice 17. — Notons

$$O_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : AA^\top = I_n\} \quad [\text{groupe orthogonal}]$$

1. Démontrer que $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.
2. Démontrer que le groupe $(O_n(\mathbf{R}), \times)$ est compact.

2.5. Un fermé relatif d'un compact est compact

Proposition 18. — Supposons A compacte et considérons une partie B de A . Alors B est compact si et seulement si B est un fermé relatif de A .

♥ Une démonstration de la proposition 18 est à connaître.

Exercice 19. — Notons

$$SO_n(\mathbf{R}) := \{A \in O_n(\mathbf{R}) : \det A = 1\} \quad [\text{groupe spécial orthogonal}]$$

1. Démontrer que $SO_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(O_n(\mathbf{R}), \times)$.
2. Démontrer que le groupe $(SO_n(\mathbf{R}), \times)$ est compact.

2.6. CNS de convergence pour une suite d'éléments d'un compact

Proposition 20. — *Supposons A compacte et considérons une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$. Alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Exercice 21. — Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $(\mathbf{K}^d, \|\cdot\|_{\infty})$ qui est bornée et qui vérifie

$$u_n + \frac{1}{2} u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0_{\mathbf{K}^d}$$

1. Soit a une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Démontrer que $-2a$ est également valeur d'adhérence.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers le vecteur nul de \mathbf{K}^d .

Exercice 22. — Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux \mathbf{K} -espaces vectoriels normés, F_1 une partie fermée de E_1 , K_2 une partie compacte de E_2 et $f: F_1 \rightarrow K_2$ une application. On note

$$\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in F_1\} \quad [\text{graphe de l'application } f]$$

et on munit $E_1 \times E_2$ de la norme N définie par

$$N \left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x_1, x_2) \longmapsto \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\} \end{array} \right. \quad [\text{norme produit}]$$

Démontrer que l'application f est continue si et seulement si son graphe Γ est une partie fermée de $(E_1 \times E_2, N)$.

2.7. Produit d'un nombre fini de compacts

Théorème 23. — *Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ des \mathbf{K} -espaces vectoriels normés. On munit le \mathbf{K} -espace vectoriel normé $\prod_{i=1}^n E_i$ de la norme*

$$N \left| \begin{array}{l} \prod_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \max_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i) \end{array} \right. \quad [\text{norme produit}]$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit K_i une partie compacte de (E_i, N_i) . Alors $\prod_{i=1}^n K_i$ est une partie compacte de $(\prod_{i=1}^n E_i, N)$.

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

- *Initialisation à $n = 1$.* L'assertion est claire.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que tout produit de n compacts de n \mathbf{K} -espace vectoriels normés soit une partie compacte de leur espace produit. Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n), (E_{n+1}, N_{n+1})$ des \mathbf{K} -espaces vectoriels normés. Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, soit K_i une partie compacte de (E_i, N_i) .

Démontrons que $\prod_{i=1}^{n+1} K_i$ est une partie compacte de $(\prod_{i=1}^{n+1} E_i, N)$. Soit $(u_k = (u_{1,k}, \dots, u_{n,k}, u_{n+1,k}))_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\prod_{i=1}^{n+1} K_i$.

— D'après hypothèse de récurrence, $\prod_{i=1}^n K_i$ est une partie compacte de $\prod_{i=1}^n E_i$. Comme $(u_k = (u_{1,k}, \dots, u_{n,k}))_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\prod_{i=1}^n E_i$, il existe une application $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$ tels que $(u_{1,\varphi(k)}, \dots, u_{n,\varphi(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{norme produit}} (x_1, \dots, x_n)$, i.e.

$$u_{1,\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_1} x_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad u_{n,\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_n} x_n \tag{6}$$

— La suite $(u_{n+1,\varphi(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite du compact K_{n+1} de E_{n+1} . Il existe donc une application $\psi: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $x_{n+1} \in E_{n+1}$ tels que

$$u_{n+1,\varphi(\psi(k))} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_{n+1}} x_{n+1} \tag{7}$$

— De (6) et (7), nous déduisons

$$u_{1,\varphi\psi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_1} x_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad u_{n,\varphi\psi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_n} x_n \quad , \quad u_{n+1,\varphi\psi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N_{n+1}} x_{n+1}$$

i.e.

$$u_{\varphi\psi(k)} = (u_{1,\varphi\psi(k)}, \dots, u_{n,\varphi\psi(k)}, u_{n+1,\varphi\psi(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{N} (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

□

Exercice 24. — Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes.

1. La sphère unité $S(0_E, 1) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ une partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$.
2. La boule unité fermée $\overline{B(0_E, 1)} := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$.

Exercice 25. — Si A, B sont des parties non vides de E , on définit la distance entre A et B par

$$d(A, B) := \inf \{ \|a - b\| : (a, b) \in A \times B \}$$

1. Soient K, L deux parties compactes, non vides et disjointes de E . Démontrer que $d(K, L) > 0$.
2. Donner deux parties F, G fermées, non vides et disjointes de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ telles que $d(F, G) = 0$.

3. Applications continues sur une partie compacte

Notation. — $(E, \|\cdot\|_E)$ désigne un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

3.1. Image continue d'un compact

Théorème 26. — Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$. Si A est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_E)$, alors

$$f(A) := \{f(a) : a \in A\}$$

est un compact de $(F, \|\cdot\|_F)$.

♥ Une démonstration du théorème 26 est à connaître.

3.2. Théorème des bornes atteintes

Corollaire 27. — Si A est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_E)$ et $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbf{R})$, alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. :

$$\exists (x_m, x_M) \in A^2 \quad \forall x \in A \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

♥ Une démonstration du corollaire 27 est à connaître.

Exercice 28. — On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ et on considère sa boule unité fermée $\overline{B(0, 1)}$. Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{l} \overline{B(0, 1)} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y, z) \longmapsto x \sin(y) + y \cos(z) + z^3 \end{array} \right.$$

est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 29. — On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ et la partie

$$K := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 1 \text{ et } x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$$

Soit $f: K \longrightarrow \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $x \in K$, $f(x) > 0$. Démontrer que

$$\inf \{f(x) : x \in K\} > 0$$

Exercice 30. — Soient K une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_E)$ et $f: K \longrightarrow \mathbf{R}$ une application telle que

$$\forall (x, y) \in K^2 \quad x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

Démontrer que l'application f possède un unique point fixe.

Définition 31. — Soit $f: E \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, ce que l'on note $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ si

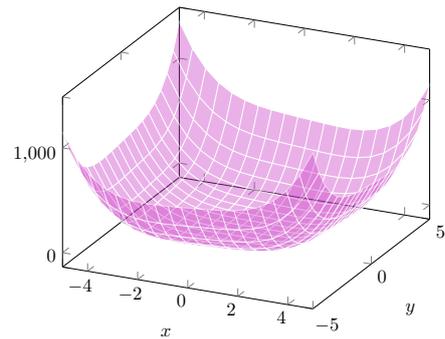
$$\forall A \in \mathbf{R}_+ \quad \exists R \in \mathbf{R}_+ \quad \forall x \in E \quad \|x\| \geq R \implies f(x) \geq A$$

Exercice 32. — On illustre un des intérêts de la définition 31.

1. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ et une application $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Démontrer que l'application f possède un minimum.
2. Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy \end{array} \right.$$

possède un minimum global.



3.3. Théorème de Heine

Théorème 33. — Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$. Si A est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_E)$, alors l'application f est uniformément continue sur A .

♥ Une démonstration du théorème 33 est à connaître.

4. Connexité par arcs

Notation. — Dans toute cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

4.1. Arc joignant deux points

Définition 34. — Soit $(a_1, a_2) \in A^2$. Une application arc tracé dans A joignant a_1 à a_2 est une application

$$\varphi: [\alpha, \beta] \longrightarrow A \text{ telle que } \begin{cases} \varphi \text{ est continue} \\ \varphi(\alpha) = a_1 \\ \varphi(\beta) = a_2 \end{cases}$$

où α et β sont des réels tels que $\alpha < \beta$.

Exemple 35. — Soient $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_+^*$ et x_1, x_2 deux points de la boule ouverte $B(a, r)$. Alors l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow B(a, r) \\ t \longmapsto tx_1 + (1-t)x_2 \end{array} \right. \quad [\text{application bien définie car } B(a, r) \text{ est convexe}]$$

est un arc tracé dans $B(a, r)$ joignant a à b .

Proposition 36. — Soient a_1, a_2, a_3 des points de A .

1. L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow A \\ t \longmapsto a_1 \end{array} \right.$$

est un arc tracé dans A joignant a_1 à a_1 .

2. Supposons qu'il existe un arc $\varphi: [\alpha, \beta] \longrightarrow A$ tracé dans A joignant a_1 à a_2 , où α, β sont des réels tels que $\alpha < \beta$. Si ψ est l'application

$$\psi \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow [\alpha, \beta] \\ t \longmapsto t\alpha + (1-t)\beta \end{array} \right.$$

alors l'application $\varphi \circ \psi: [0, 1] \longrightarrow A$ est un arc tracé dans A joignant a_2 à a_1 .

3. Soient $\varphi_1: [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow A$ un arc tracé dans A joignant a_1 à a_2 et $\varphi_2: [\alpha_2, \beta_2] \longrightarrow A$ un arc tracé dans A joignant a_2 à a_3 , où $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2$. Alors l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{l} [\alpha_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \longrightarrow A \\ t \longmapsto \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \leq \beta_1 \\ \varphi_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & \text{si } t > \beta_1 \end{cases} \end{array} \right.$$

est bien définie et est un arc tracé dans A joignant a_1 à a_3 .

4.2. Partie connexe par arcs

Définition 37. — On dit que A est connexe par arcs si, pour tout couple $(a, b) \in A^2$, il existe un arc tracé dans A joignant a à b .

Exercice 38. — L'intersection de deux parties connexes par arcs est-elle nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 39. — Une réunion de deux parties connexes par arcs disjointes peut-elle être connexe par arcs ?

Exercice 40. — Démontrer que le produit de deux parties connexes par arcs est connexe par arcs.

Exercice 41. — L'intérieur d'une partie connexe par arcs est-il nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 42. — Démontrer que \mathbf{C}^* est une partie connexe par arcs de \mathbf{C} et en déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est une partie connexe par arcs de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 43. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas une partie connexe par arcs de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

4.3. Les parties convexes sont connexes par arcs

Proposition 44. — Une partie convexe de E est connexe par arcs.

Exemple 45. — Une boule de E est une partie connexe par arcs.

Exemple 46. — Un sous-espace vectoriel de E est une partie connexe par arcs.

4.4. Les parties étoilées sont connexes par arcs

Définition 47. — La partie A est dite étoilée si

$$\exists a_0 \in A \quad \forall a \in A \quad [a_0, a] \subset A$$

Proposition 48. — Une partie étoilée de E est une partie connexe par arcs.

Exercice 49. — Démontrer que $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |xy| \leq 1\}$ est une partie connexe par arcs de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

4.5. Composantes connexes par arcs

Rappel. — Un relation \mathcal{R} sur A est appelée relation d'équivalence si elle vérifie les trois propriétés suivantes.

1. $\forall a \in A \quad a \mathcal{R} a$ [réflexivité]
2. $\forall (a_1, a_2) \in A^2 \quad a_1 \mathcal{R} a_2 \implies a_2 \mathcal{R} a_1$ [symétrie]
3. $\forall (a_1, a_2, a_3) \in A^3 \quad a_1 \mathcal{R} a_2 \text{ et } a_2 \mathcal{R} a_3 \implies a_1 \mathcal{R} a_3$ [transitivité]

Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur A et $a \in A$, on définit la classe de a par

$$\bar{a} := \{a' \in E : a \mathcal{R} a'\} \subset A$$

L'ensemble des classes d'équivalence est noté A/\mathcal{R} (ensemble quotient de A par la relation d'équivalence \mathcal{R}). Les classes d'équivalence forment une partition de A

$$A = \bigsqcup_{C \in A/\mathcal{R}} C$$

Proposition 50. — La relation \sim sur A définie par

$$\forall (a_1, a_2) \in A^2 \quad a_1 \sim a_2 \iff \text{il existe un arc tracé dans } A \text{ joignant } a_1 \text{ à } a_2$$

est une relation d'équivalence sur A .

Définition 51. — Une classe d'équivalence pour la relation \sim sur A , introduite dans la proposition 50, est appelée composante connexe par arcs.

Remarque 52. — Une composante connexe par arcs de A est une partie connexe par arcs de E .

Remarque 53. — Si A est connexe par arcs, alors il ne possède qu'une seule composante connexe par arcs : la partie A toute entière.

Exercice 54. — Quelles sont les composantes connexes de \mathbf{R}^* ?

Exercice 55. — Soit U une partie ouverte de E . Démontrer que les composantes connexes de U sont des parties ouvertes de E .

Exercice 56. — On rappelle que, d'après l'algorithme du pivot de Gauß, toute matrice de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ s'écrit comme un produit de matrices de transvection ou de dilatation. En déduire que

$$\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})^+ := \{A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) : \det A > 0\} \quad \text{et} \quad \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})^- := \{A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) : \det A < 0\}$$

sont les deux composantes connexes par arcs de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

4.6. Caractérisation des parties connexes par arcs de \mathbf{R}

Proposition 57. — Une partie A de \mathbf{R} est connexe par arcs si et seulement si A est un intervalle de \mathbf{R} .

4.7. Image continue d'une partie connexe par arcs

Théorème 58. — Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et $f: A \rightarrow F$ une application continue. Alors :

$$A \text{ est connexe par arcs} \implies f(A) \text{ est connexe par arcs.}$$

Exercice 59. — $\text{SO}_2(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. Démontrer que :

$$\text{SO}_2(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : A^\top A = I_2 \text{ et } \det(A) = 1\}$$

est connexe par arcs.

Exercice 60. — Deux espaces vectoriels normés (E_1, N_1) et (E_2, N_2) sont dit homéomorphes s'il existe une application $f: E_1 \rightarrow E_2$ qui est bijective, continue et dont l'application réciproque $f^{-1}: E_2 \rightarrow E_1$ est également continue. Démontrer que \mathbf{R} et \mathbf{R}^2 ne sont pas homéomorphes.

4.8. Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire 61. — Soient une application $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ et a_1, a_2 des points de A .

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ A \text{ est connexe par arcs} \\ f(a_1)f(a_2) \leq 0 \end{array} \right\} \implies \exists a \in A \quad f(a) = 0_{\mathbf{R}}$$

Démonstration. L'image $f(A)$ de A par f est une partie connexe par arcs de \mathbf{R} (théorème 58), donc un intervalle de \mathbf{R} (théorème 57). Comme $f(a_1)$ et $f(a_2)$ sont dans $f(A)$, de signes opposés, 0 appartient aussi dans $f(A)$. Donc $0 \in \mathbf{R}$ possède au moins un antécédent par f dans A . \square