Calcul différentiel 2

1. Vecteur tangent à une partie d'un espace vectoriel de dimension finie

Notation. — Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1.1. Définition d'un vecteur tangent

Définition 1. — *Soient X une partie non vide de E et $x \in X$.*

1. *Un vecteur $v \in E$ est dit tangent à X en x si :*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \gamma \in X^{]-\varepsilon,\varepsilon[} \quad \begin{cases} \gamma \text{ est dérivable en } 0 & [\text{régularité du chemin au temps } t=0] \\ \gamma(0) = x & [\text{le chemin } \gamma \text{ passe par } x \text{ au temps } t=0] \\ \gamma'(0) = v & [v \text{ est le vecteur vitesse du chemin } \gamma \text{ au temps } t=0] \end{cases}$$

2. *L'ensemble des vecteurs de E tangents à X en x est noté T_xX, i.e. :*

$$T_xX := \{v \in E \ : \ v \text{ est tangent à } X \text{ en } x\} \subset E$$

Exercice 2. — Soient X une partie non vide de E et $x \in X$.

1. Démontrer que $0_E \in T_xX$.
2. Démontrer que, pour tout $v \in T_xX$, $\mathrm{Vect}\,(v) \subset T_xX$.
3. Démontrer que, si $x \in \mathring{X}$, alors $T_xX = E$.

1.2. Vecteurs tangents à sous-espace affine

Rappel 3. — On rappelle la définition de sous-espace affine de E, la notion de direction de sous-espace affine et la description d'un sous-espace affine à partir de sa direction et de l'un quelconque de ses points.

1. Une partie $\mathcal{A}$ de E est appelée sous-espace affine de E s'il existe un point $x \in E$ et un sous-espace vectoriel V de E tels que :

$$(\star) \qquad \mathcal{A} = x + V := \{x + v \ : \ v \in V\}$$

2. Si x_1, x_2 sont des points de E et V_1, V_2 sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $x_1 + V_1 = x_2 + V_2$, alors $V_1 = V_2$. Le sous-espace vectoriel V de E qui apparaît dans l'identité $(\star)$ est donc intrinsèque au sous-espace affine $\mathcal{A}$. On l'appelle direction du sous-espace affine $\mathcal{A}$.
3. Si $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de E, de direction V, alors pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} = a + V$.

Proposition 4. — *Soient $\mathcal{A}$ un sous-espace affine, de direction notée V, et $a \in \mathcal{A}$. Alors $T_a\mathcal{A} = V$.*

Démonstration.

$\boxed{\subset}$ Soient $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in \mathcal{A}^{]-\varepsilon,\varepsilon[}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = a$. Comme, pout tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$:

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \frac{\gamma(t) - a}{t} \in V$$

et V est une partie fermée de E (sous-espace vectoriel de dimension finie de E), $\gamma'(0) \in V$.

$\boxed{\supset}$ Si $v \in V$, alors l'application :

$$\gamma \ \left|\ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathcal{A} = a + V \\ t & \longmapsto & a + t\,v \end{array}\right.$$

est bien définie et dérivable en 0. De plus, elle vérifie $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

□

1.3. Vecteurs tangents à une sphère d'un espace euclidien

Notation. — Dans cette partie, nous supposons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ et nous notons $||\cdot||$ la norme associée. Ainsi :

$$\forall\, x \in E \qquad ||\,x\,|| = \sqrt{\langle\, x\,,\, x\,\rangle}$$

Proposition 5. — *Soient $a \in E$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in S(a,r)$:*

$$T_x S(a,r) = \mathrm{Vect}\,(x-a)^{\perp}$$

Démonstration.

$\boxed{\subset}$ Soient $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in S(a,r)^{]-\varepsilon,\varepsilon[}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = x$. De :

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\} \qquad \langle\, \gamma(t) - a\,,\, \gamma(t) - a \,\rangle = r^2$$

et de la dérivabilité de γ en 0, nous déduisons :

$$2\, \langle\, \gamma'(0)\,,\, \gamma(0) - a \,\rangle = 0$$

puis $\langle\, \gamma'(0)\,,\, x-a \,\rangle = 0$.

$\boxed{\supset}$ Nous savons déjà que $0_E \in T_x S(a,r)$ (exercice 2). Considérons donc $v \in \mathrm{Vect}\,(x-a)^{\perp} \setminus \{0_E\}$. L'application :

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & S(a,r) \\ t & \longmapsto & a + \cos\left(\dfrac{||\,v\,||}{r}\, t\right)(x-a) + \sin\left(\dfrac{||\,v\,||}{r}\, t\right) \dfrac{r}{||\,v\,||}\, v \end{array} \right.$$

est bien définie et dérivable en 0. De plus, elle vérifie $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

□

1.4. Vecteurs tangents au graphe d'une fonction numérique différentiable sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$

Proposition 6. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $(a,b) \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable en (a,b) et*

$$X := \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \Omega\} \subset \mathbf{R}^3$$

Alors :

$$T_{(a,b,f(a,b))} X = \mathrm{Vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\right)$$

Démonstration.

$\boxed{\subset}$ Soient $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in X^{]-\varepsilon,\varepsilon[}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = (a,b,f(a,b))$. Si l'on note x la première application composante de γ et y la deuxième application composante de γ, alors les fonctions x et y sont dérivables en 0 et :

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\qquad \gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \qquad [\gamma \text{ est à valeurs dans } X]$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \left(x'(0), y'(0), \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)) \times x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \times y'(0)\right) \\ &= \left(x'(0), y'(0), \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \times x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \times y'(0)\right) \\ &= x'(0)\, \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) + y'(0)\, \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ fixé. La fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & (a + t\,\alpha, b + t\,\beta) \end{array} \right.$$

est continue et prend la valeur (a,b) en $t = 0$. Comme la fonction f est définie sur Ω, partie ouverte de $\mathbf{R}^2$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction :

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc}]-\varepsilon, \varepsilon[& \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & (a + t\,\alpha, b + t\,\beta, f(a + t\,\alpha, b + t\,\beta)) \end{array} \right.$$

est bien définie. Elle est dérivable en 0 (chacune de ses applications composante l'est). De plus, elle vérifie $\gamma(0) = (a,b,f(a,b))$ et

$$\gamma'(0) = \left(\alpha, \beta, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \times \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \times \alpha\right) = \alpha\, \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) + \beta\, \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

□

1.5. Vecteurs tangents à un diviseur à croisement normal (HP)

Si X est une partie non vide de E et $x \in X$, l'ensemble T_xX des vecteurs tangents à X en x n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, si :

$$X := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x\,y = 0\right\} \qquad \text{[union des deux axes de coordonnées]}$$

alors $T_{(0,0)}X = X$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

1.6. Vecteurs tangents à une ligne de niveau

Théorème 7. — *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E, $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Posons :*

$$X = g^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \in \Omega \ : \ g(x) = \lambda\} \qquad [\textit{ligne de niveau } \lambda]$$

et supposons X non vide. Alors :

$$\forall\, x \in X \qquad \mathrm{d}g(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbf{R})} \quad \Longrightarrow \quad T_xX = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{d}g(x)\right)$$

Ce théorème est admis.

Corollaire 8. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (muni de son produit scalaire usuel), $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Posons :*

$$X = g^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \in \Omega \ : \ g(x) = \lambda\} \qquad [\textit{ligne de niveau } \lambda]$$

et supposons X non vide. Alors :

$$\forall\, x \in X \qquad \nabla g(x) \neq 0_{\mathbf{R}^n} \quad \Longrightarrow \quad T_xX = \nabla g(x)^{\perp}$$

Exercice 9. — Soit :

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right\} \qquad \text{[parabolloïde]}$$

Déterminer $T_{(2,3,2)}$.

Exercice 10. — Soient a, b, c des réels strictement positifs et

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\} \qquad \text{[ellipsoïde]}$$

Déterminer $T_{(\alpha,\beta,\gamma)}X$, pour tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in X$.

2. Optimisation : étude au premier ordre

Notation. — Pour toute cette partie, on fixe un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ de dimension finie $n \geqslant 1$.

2.1. Définition d'un extremum local pour une fonction numérique

Définition 11. — *Soient A une partie de E et $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.*

1. *On dit que f atteint un maximum local en un point a_M de A si :*

$$\exists\, r > 0 \qquad \forall\, a \in A \cap B(a_M, r) \qquad f(a) \leqslant f(a_M)$$

2. *On dit que f atteint un minimum local en un point a_m de A si :*

$$\exists\, r > 0 \qquad \forall\, a \in A \cap B(a_m, r) \qquad f(a) \geqslant f(a_m)$$

2.2. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction réelle (rappel de MP2I)

Théorème 12. — *Soient $r > 0$ et $f\colon\ ]-r, r[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en 0. Si la fonction f atteint un extremum local en 0, alors $f'(0) = 0$.*

2.3. Point critique d'une application différentiable

Définition 13. — *Soient Ω un ouvert de E, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable et $x \in \Omega$. On dit qu'un point x est un point critique de f si :*

$$\mathrm{d}f(x) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbf{R})}$$

Exercice 14. — Justifier que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 - 3x + xy^2 \end{array} \right.$$

est différentiable et déterminer ses points critiques.

2.4. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert, à l'ordre 1

Théorème 15. — *Soient Ω un ouvert de E et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. Si x_0 est un point de Ω tel que :*

(H1) *f est différentiable en x_0*

(H2) *f atteint un extremum local en x_0*

alors :

(C) *x_0 est un point critique de f.*

La condition nécessaire du théorème 15 n'est pas suffisante. En effet, le point 0 est un point critique de l'application dérivable/différentiable :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$

mais la fonction f n'atteint pas un extremum local en ce point.

Démonstration. Considérons une norme $||\cdot||$ sur E. Supposons que l'application f est différentiable en x_0 et qu'elle atteint un maximum local en un point x_0 de Ω.

(a) *La fonction f est majorée par $f(x_0)$ sur $\Omega \cap B(x_0, r_1)$.* — Comme f atteint un maximum local en un point x_0 :

$$\exists\, r_1 > 0 \qquad \forall\, x \in B(x_0, r_1) \cap \Omega \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \tag{1}$$

(b) *Il existe une boule ouverte $B(x_0, r_2)$ incluse dans Ω.* — Comme Ω est une partie ouverte de E et $x_0 \in \Omega$:

$$\exists\, r_2 > 0 \qquad B(x_0, r_2) \subset \Omega \tag{2}$$

(c) *La fonction f est définie sur $B(0, \min(r_1, r_2))$ et est majorée par $f(x_0)$ sur cette boule ouverte.* — D'après (1) et (2), la fonction f est définie que $B(0, \min(r_1, r_2))$ et :

$$\forall\, x \in B(0, \min(r_1, r_2)) \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \tag{3}$$

(d) *Introduction d'un arc γ ou déplacement autour de x_0 dans la direction v.* — Soit v un vecteur non nul de E. La fonction :

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\min(r_1, r_2)}{||\,v\,||}, \dfrac{\min(r_1, r_2)}{||\,v\,||}\right[& \longrightarrow & B(x_0, \min(r_1, r_2)) \\ t & \longmapsto & x_0 + t\,v \end{array} \right.$$

est bien définie et dérivable/différentiable en $t = 0$. De plus, elle vérifie $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$.

(e) *La fonction $f\circ\gamma$, de la variable réelle à valeurs réelles, atteint son maximum en 0, point intérieur.* — La fonction :

$$f\circ\gamma \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\min(r_1,r_2)}{\|v\|},\frac{\min(r_1,r_2)}{\|v\|}\right[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(x_0+t\,v) \end{array} \right.$$

de la variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$, est donc dérivable/différentiable en $t=0$. De plus, comme γ prend ses valeurs dans $B(x_0,\min(r_1,r_2))$, l'inégalité (3) nous livre :

$$\forall t\in\left]-\frac{\min(r_1,r_2)}{\|v\|},\frac{\min(r_1,r_2)}{\|v\|}\right[\qquad f\circ\gamma(t)\leqslant f(x_0)=f\circ\gamma(0)$$

D'après le théorème 12 et la formule de dérivation le long d'un arc :

$$0=(f\circ\gamma)'(0)=\mathrm{d}f(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)=\mathrm{d}f(x_0)\cdot v$$

□

Exercice 16. — On considère la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\,y+\frac{4}{x}+\frac{2}{y} \end{array} \right.$$

1. Justifier que f ne possède pas de maximum global.
2. Démontrer que :
$$\forall x\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\setminus\left[\frac{4}{7},\frac{49}{2}\right]\times\left[\frac{2}{7},\frac{49}{4}\right] \qquad f(x,y)\geqslant f(1,1)$$
puis que f possède un mimimum global.
3. Justifier que f est différentiable sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, puis qu'elle admet un unique point critique (x_0,y_0).
4. La fonction f atteint-elle un minimum/maximum local/global en (x_0,y_0) ?

Exercice 17. — On munit $\mathbf{R}^n$ de sa norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ et on note :

$$B:=\{x\in\mathbf{R}^n\ :\ \|x\|<1\} \qquad , \qquad \overline{B}:=\{x\in\mathbf{R}^n\ :\ \|x\|\leqslant 1\} \qquad , \qquad S:=\{x\in\mathbf{R}^n\ :\ \|x\|=1\}$$

Soit $f\colon\overline{B}\longrightarrow\mathbf{R}$ une application continue sur $\overline{B}$, différentiable sur B et constante sur S. Démontrer qu'il existe $c\in B$ tel que $\mathrm{d}f(c)=0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})}$.

2.5. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sous contrainte, à l'ordre 1

Théorème 18. — *Soient Ω un ouvert de E, $f\colon\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$ une application et X une partie non vide de Ω. Si x_0 est un point de X tel que :*

(H1) *f est différentiable en x_0*

(H2) *la restriction de f à X atteint un extremum local en x_0*

alors :

(C) $\forall v\in T_{x_0}X \quad \mathrm{d}f(x_0)\cdot v=0_{\mathbf{R}}$

Démonstration. Supposons que f est différentiable en x_0 et que la restriction de f à X atteint un maximum local en x_0.

(a) *La fonction $f_{|X}$ est majorée par $f(x_0)$ sur $X\cap B(x_0,r)$.* — Comme $f_{|X}$ atteint un maximum local en x_0 :

$$\exists\, r>0 \qquad \forall x\in B(x_0,r)\cap X \qquad f(x)\leqslant f(x_0) \tag{4}$$

(b) *Introduction d'un vecteur tangent à X en x_0, à l'aide d'un arc γ.* — Fixons un vecteur $v\in T_{x_0}X$. Il existe $\varepsilon>0$ et $\gamma\in X^{]-\varepsilon,\varepsilon[}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0)=x_0$ et $\gamma'(0)=v$.

(c) *Restriction de l'arc γ pour que le nouvel arc prenne ses valeurs dans $X \cap B(x_0, r)$.* — Comme γ est continue en 0 :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad |t| < \alpha \implies ||\,\gamma(t) - x_0\,|| < r$$

L'application :

$$\widetilde{\gamma} \;\left|\; \begin{array}{ccc}]-\min(\alpha,\varepsilon), \min(\alpha,\varepsilon)[& \longrightarrow & X \cap B(x_0, r) \\ t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}\right.$$

est bien définie. De plus, elle est différentiable/dérivable en 0 et vérifie $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$ et $\widetilde{\gamma}\,'(0) = v$.

(d) *La fonction $f \circ \widetilde{\gamma}$, de la variable réelle à valeurs réelles, atteint son maximum en 0, point intérieur.* — La fonction :

$$f \circ \widetilde{\gamma} \;\left|\; \begin{array}{ccc}]-\min(\alpha,\varepsilon), \min(\alpha,\varepsilon)[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(\gamma(t)) \end{array}\right.$$

est donc dérivable/différentiable en $t = 0$. De plus, comme $\widetilde{\gamma}$ prend ses valeurs dans $X \cap B(x_0, r)$, l'inégalité (4) nous livre :

$$\forall\, t \in]-\min(\alpha,\varepsilon), \min(\alpha,\varepsilon)[\qquad f \circ \widetilde{\gamma}(t) \leqslant f(x_0) = f \circ \widetilde{\gamma}(0)$$

D'après le théorème 12 et la formule de dérivation le long d'un arc :

$$0 = (f \circ \widetilde{\gamma})'(0) = \mathrm{d}f\,(\widetilde{\gamma}(0)) \cdot \widetilde{\gamma}\,'(0) = \mathrm{d}f(x_0) \cdot v$$

□

Lemme 19. — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, φ une forme linéaire non nulle sur E et ψ une forme linéaire sur E. Alors :*

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) \subset \mathrm{Ker}\,(\psi) \quad \iff \quad (\,\exists\, \lambda \in \mathbf{R} \quad \psi = \lambda\, \varphi\,)$$

Corollaire 20. — *Soient Ω un ouvert de E, $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbf{R})$ et :*

$$X := g^{-1}\,(\{0\}) = \{x \in \Omega \;:\; g(x) = 0\} \qquad [\textit{ligne de niveau } 0 \textit{ pour la fonction } g]$$

Si x_0 est un point de X tel que :

(H1) *la restriction de f à X atteint un extremum local en x_0*

(H2) $\mathrm{d}g(x_0) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbf{R})}$

alors :

(C) $\exists\, \lambda \in \mathbf{R} \quad \mathrm{d}f(x_0) = \lambda\, \mathrm{d}g(x_0) \qquad$ [*le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange*]

Démonstration. Supposons (H1) et (H2) vérifiées. D'après le théorème 18 :

$$\forall\, v \in T_{x_0}X \qquad \mathrm{d}f(x_0) \cdot v = 0_{\mathbf{R}}$$

D'après le théorème 7, $T_{x_0}X = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}g(x_0))$. Ainsi :

$$\forall\, v \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}g(x_0)) \qquad \mathrm{d}f(x_0) \cdot v = 0_{\mathbf{R}}$$

d'où $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}g(x_0)) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0))$. Le lemme 19 livre alors un réel λ tel que $\mathrm{d}f(x_0) = \lambda\, \mathrm{d}g(x_0)$. □

Corollaire 21. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (muni de son produit scalaire usuel), $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbf{R})$ et :*

$$X := g^{-1}\,(\{0\}) = \{x \in \Omega \;:\; g(x) = 0\} \qquad [\textit{ligne de niveau } 0 \textit{ pour la fonction } g]$$

Si x_0 est un point de X tel que :

(H1) *la restriction de f à X atteint un extremum local en x_0 ;*

(H2) $\nabla g(x_0) \neq 0_{\mathbf{R}^n}$

alors :

(C) $\exists\, \lambda \in \mathbf{R} \qquad \nabla f(x_0) = \lambda\, \nabla g(x_0) \qquad$ [*le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange*]

Exercice 22. — Déterminer les extrema globaux de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\,y\,z \end{array} \right.$$

sur $S := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$.

Exercice 23. — Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 4\,x^2+12\,x\,y-y^2 \end{array} \right.$$

et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u,v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
   (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
   $$(S) \ : \ \left\{ \begin{array}{lll} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{array} \right.$$
   (b) Montrer que $(\lambda-4)(\lambda+1)-36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ.
3. Déterminer les valeurs possibles de (u,v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

Exercice 24. — Déterminer les extrema globaux de la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & y^2\,\left(x^2-z^2-1\right) \end{array} \right.$$

sur $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$.

Exercice 25. — On note $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $||\cdot||$ la norme associée. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, S la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ X & \longmapsto & \langle AX\,,\,X \rangle \end{array} \right.$$

1. Justifier que la fontion f admet un maximum sur S.
2. En utilisant le théorème d'optimisation sous contrainte, démontrer que A possède un vecteur propre.

3. Optimisation : étude au second ordre

3.1. Définition de la matrice Hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$

Définition 26. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$,*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$. La matrice Hessienne de f en a, notée $H_f(a)$, est définie par :

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

Exercice 27. — Justifier que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2y^3z^5 \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer sa matrice Hessienne au point $(2,-1,1)$.

3.2. Une propriété fondamentale de la matrice Hessienne

Proposition 28. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :

$$\forall\, a \in \Omega, \qquad H_f(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème de Schwarz. □

3.3. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Convention. — Nous confondons $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ dans la suite, i.e. pour tous réels $a_1, \dots, a_n$, nous identifions :

$$\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{\text{élement de } \mathbf{R}^n} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}}_{\text{élement de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})}$$

Proposition 29. — *On note $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$ et $|| \cdot ||$ la norme euclidienne associée sur $\mathbf{R}^n$. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \langle \nabla f(a)\,,\, h \rangle + \frac{1}{2} \langle h\, H_f(a)\,,\, h \rangle + \mathrm{o}\left(||\, h\, ||^2 \right)$$

i.e. :

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \nabla f(a) \times h^\top + \frac{1}{2}\, h \times H_f(a) \times h^\top + \mathrm{o}\left(||\, h\, ||^2 \right)$$

Ce théorème est admis.

3.4. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, à l'ordre 2

Théorème 30. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$.*

1. *Si f atteint un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.*

2. *Si f atteint un maximum local en a alors a est un point critique de f et $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.*

Démonstration.

1. Supposons que la fonction f atteigne un minimum local en a.
   (a) *Le point a est un point critique de f.* — Nous avons déjà établi qu'alors f est un point critique de f, donc $\nabla f(a) = 0_{\mathbf{R}^n}$ (théorème 15).
   (b) *Écriture de la formule de Taylor au point a.* — La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a s'écrit donc :
   $$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \frac{1}{2}\, h \times H_f(a) \times h^\top + \mathrm{o}\left(||\, h\, ||^2 \right) \tag{5}$$
   (c) *Introduction d'un vecteur non nul $h \in \mathbf{R}^n$ et DL de la fonction $t \longmapsto f(a+t\,h)$ à l'ordre 2 en $0_{\mathbf{R}}$.* — Fixons un vecteur non nul $h \in \mathbf{R}^n$. Comme a est un point de l'ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, la fonction de la variable réelle t :
   $$t \longmapsto f(a+t\,h)$$
   est définie sur un voisinage ouvert de $0_{\mathbf{R}}$ et, d'après (5) :
   $$f(a+t\ h) \underset{t \to 0_{\mathbf{R}}}{=} f(a) + \frac{t^2}{2}\, h \times H_f(a) \times h^\top + \mathrm{o}\left(t^2\right)$$
   d'où :
   $$h \times H_f(a) \times h^\top + \mathrm{o}\,(1) \underset{t \to 0_{\mathbf{R}}}{=} \frac{2}{t^2} \left(f(a+t\ h) - f(a) \right) \tag{6}$$

(d) *Conclusion à l'aide du signe de la fonction* $t \longmapsto \dfrac{2}{t^2}\,(f(a+t\,h)-f(a))$ *au voisinage de* $0_{\mathbf{R}}$. — Comme f atteint un minimum local en a, la fonction :

$$t \longmapsto \frac{2}{t^2}\,(f(a+t\,h)-f(a))$$

est positive ou nulle sur un voisinage épointé de $0_{\mathbf{R}}$. Aussi, en faisant tendre t vers $0_{\mathbf{R}}$ dans (6), il vient :

$$h \times H_f(a) \times h^\top \geqslant 0$$

2. Il suffit d'appliquer la propriété 1, déjà établie, à la fonction $-f$ pour obtenir la propriété 2.

□

3.5. Définition d'un extremum local strict pour une fonction numérique

Définition 31. — *Soient A une partie de E et $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.*

1. *On dit que f atteint un maximum local strict en un point a_M de A si :*

$$\exists\, r>0 \qquad \forall\, a \in A \cap B(a_M, r) \setminus \{a_M\} \qquad f(a) < f(a_M)$$

2. *On dit que f atteint un minimum local strict en un point a_m de A si :*

$$\exists\, r>0 \qquad \forall\, a \in A \cap B(a_m, r) \setminus \{a_m\} \qquad f(a) > f(a_m)$$

3.6. Condition suffisante d'existence d'un extremum local strict sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, à l'ordre 2

Théorème 32. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$.*

1. *Si a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a.*
2. *Si a est un point critique de f et si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors f atteint un maximum local strict en a.*

Démonstration.

1. Soit a est un point critique de f tel que $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

(a) *L'application $u \longmapsto u \times H_f(a) \times u^\top$ est minorée par une valeur strictement positive sur $S\,(0_{\mathbf{R}^n}, 1)$.* — Notons $S\,(0_{\mathbf{R}^n}, 1)$ la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ (compacte puisque fermée et bornée dans $\mathbf{R}^n$ de dimension finie) et considérons la fonction :

$$q \left| \begin{array}{ccc} S\,(0_{\mathbf{R}^n}, 1) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u=(u_1,\ldots,u_n) & \longmapsto & u \times H_f(a) \times u^\top = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i\, u_j \end{array} \right.$$

qui est strictement positive ($H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) et continue ($q(u_1,\ldots,u_n)$ est une expression polynomiale en $u_1,\ldots,u_n$). D'après le théorème des bornes atteintes :

$$\exists\, s \in S\,(0_{\mathbf{R}^n}, 1) \qquad \forall\, u \in S\,(0_{\mathbf{R}^n}, 1) \qquad q(u) \geqslant q(s) > 0$$

(b) *Écriture de la formule de Taylor au point a.* — La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a s'écrit donc :

$$f(a+h) \underset{h\to 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \frac{1}{2}\, h \times H_f(a) \times h^\top + \mathrm{o}\left(||\,h\,||^2\right)$$

i.e. :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \frac{1}{2}\,(x-a) \times H_f(a) \times (x-a)^\top + \mathrm{o}\left(||\,x-a\,||^2\right)$$

Nous en déduisons que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{||\,x-a\,||^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{||\,x-a\,||}\right) \times H_f(a) \times \left(\frac{x-a}{||\,x-a\,||}\right)^\top \xrightarrow[x\to a]{} 0_{\mathbf{R}}$$

assertion que l'on peut également écrire :

$$\frac{f(x)-f(a)}{||\,x-a\,||^2} - \frac{1}{2}\, q\left(\frac{x-a}{||\,x-a\,||}\right) \xrightarrow[x\to a]{} 0_{\mathbf{R}} \tag{7}$$

puisque $\dfrac{x-a}{||\,x-a\,||} \in S\,(0_{\mathbf{R}^n}, 1)$, si $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{a\}$.

(c) *Conclusion avec la définition formelle de la notion de limite épointée.* — Comme $q(s) > 0$, nous déduisons de (7) que :

$$\exists r > 0 \qquad \forall x \in \Omega \cap B(a,r) \setminus \{a\} \qquad \left| \frac{f(x) - f(a)}{||x-a||^2} - \frac{1}{2} q\left(\frac{x-a}{||x-a||}\right) \right| \leqslant \frac{q(s)}{4}$$

puis :

$$\forall x \in \Omega \cap B(a,r) \setminus \{a\} \qquad \frac{f(x)-f(a)}{||x-a||^2} \geqslant \frac{1}{2} \underbrace{\left(q\left(\frac{x-a}{||x-a||}\right) - q(s)\right)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{q(s)}{4}}_{>0} > 0 \qquad \left[\text{car } \frac{x-a}{||x-a||} \in S(0_{\mathbf{R}^n}, 1)\right]$$

2. Il suffit d'appliquer la propriété 1, déjà établie, à la fonction $-f$ pour obtenir la propriété 2.

□

3.7. Condition suffisante d'existence d'un extremum local strict sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, à l'ordre 2

Théorème 33. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$.*

1. *Si $\nabla f(a) = (0,0)$, $\mathrm{tr}(H_f(a)) > 0$ et $\det(H_f(a)) > 0$, alors f atteint un minimum local strict en a.*

2. *Si $\nabla f(a) = (0,0)$, $\mathrm{tr}(H_f(a)) < 0$ et $\det(H_f(a)) > 0$, alors f atteint un maximum local strict en a.*

Démonstration.

1. Supposons $\nabla f(a) = (0,0)$, $\mathrm{tr}(H_f(a)) > 0$ et $\det(H_f(a)) > 0$.
   - Comme $\nabla f(a) = (0,0)$, le point a est un point critique de f.
   - D'après le théorème spectral, appliqué à la matrice $H_f(a) \in \mathcal{S}_2(\mathbf{R})$, la matrice $H_f(a)$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Si nous notons $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ ses valeurs propres, alors les hypothèses $\mathrm{tr}(H_f(a)) > 0$ et $\det(H_f(a)) > 0$ se traduisent par :
   $$\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 \lambda_2 > 0$$
   Nous en déduisons que λ_1 et λ_2 sont des réels strictement positifs. D'après la caractérisation spectrale des matrices de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbf{R})$, il vient $H_f(a) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbf{R})$.

   D'après le théorème 32, f atteint un minimum local strict en a.
2. Il suffit d'appliquer la propriété 1, déjà établie, à la fonction $-f$ pour obtenir la propriété 2.

□

Exercice 34. — Étudier les extremas locaux et globaux de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 - 3x + x y^2 \end{array} \right.$$

Exercice 35. — Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2 \end{array} \right.$$

1. La fonction f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbf{R}^2$? Si oui, les déterminer.

2. La fonction f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.

3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$. Justifier que f admet un maximum global sur K, puis le déterminer.