

①

Q1) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

$f: t \mapsto e^{-t^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0; +\infty[$.

En +∞ Soit $t > 1$,

On a $0 \leq e^{-t} \leq e^{-t^2}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge (170).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

Soit $t \in [0; \sqrt{n}]$, $e^{\frac{t^2}{n}} \geq 1 + \frac{t^2}{n}$, $e^{-\frac{t^2}{n}} \leq 1 - \frac{t^2}{n}$

Donc $e^{\frac{t^2}{n}} \geq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n$ ($t \mapsto t^n$ croissante sur $[0; +\infty[$)

Donc $e^{-\frac{t^2}{n}} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$ ($t \mapsto t^n$ décroissante sur $[0; +\infty[$)

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; \sqrt{n}]$,

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{\frac{t^2}{n}} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n, \text{ pour } n \text{ inverse décroissant sur } \mathbb{R}_+^*$$

Q3) Encadrement de l'intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \geq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt := A_n$$

Changement de variable: $u = t/\sqrt{n}$

ce qui nous donne $dt = \sqrt{n} du$

$$\bullet 0 \rightarrow 0$$

$$\bullet \sqrt{n} \rightarrow 1$$

$$\text{donc } A_n = \sqrt{n} \int_0^1 (1-u^2)^n du.$$

Changement de variable: $u = \cos(x)$, donc $x = \arccos(u)$ ($u \in [0, 1]$)

ce qui nous donne, $du = -\sin(x) dx$

$$\bullet 0 \rightarrow \pi/2$$

$$\bullet 1 \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc } A_n &= \sqrt{n} \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2(x))^n \sin(x) (-dx) \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x) \cdot \sin(x) dx \\ &= \sqrt{n} W_{2n+1} \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+t^2/n)^n} dt =: B_n$$

Changement de variable $t = \sqrt{n} \tan(u)$ ($t \in [0; \sqrt{n}]$)
 donc, $u = \text{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$

ce qui nous donne $dt = \sqrt{n} \frac{1}{\cos^2(u)} du$

• $0 \rightarrow 0$
 • $\sqrt{n} \rightarrow \pi/4$

donc $B_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1+t^2(u)} \right)^n \frac{1}{\cos^2(u)} du$

$\left(\frac{1}{1+t^2(u)} = \frac{1}{\cos^2(u)} \right) = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(u) du \quad (*)$

Changement de variable: $u = \frac{\pi}{2} - x$, donc $dx = -du$
 • $0 \rightarrow \pi/2$
 • $\pi/4 \rightarrow \pi/4$

D'où $(*) = \sqrt{n} \int_{\pi/2}^{\pi/4} \cos^{2n-2}(\pi/2 - x) (-dx) \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$

Finalement, $\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$

(24) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+2} dt = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+1} \sin(t) dt \\ &= \left[-\sin(t)^{n+1} \cos(t) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos^2(t) (n+1) \sin(t)^n dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t) dt \\
&= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } (n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$$

$$\text{Finalement, } W_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)} W_n$$

Montrons que $((n+1) W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

Or $t \mapsto \sin^n(t)$ est positive et continue sur $[0; \pi/2]$,
et diffuse de 0 en $\pi/4$.

Donc $W_n > 0$. (séparation de l'intégrale)

$$\text{On sait que } W_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)} W_n,$$

$$\text{Donc } W_{n+2} W_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} W_n W_{n+1}$$

$$\text{Donc } (n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (n+1) W_n W_{n+1}$$

Donc $((n+1) W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante

(2)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = W_n W_0$

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \pi/2 \quad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = \pi/2$

$(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car $\forall t \in [0; \pi/2], \sin(t) \in [0; 1]$

Donc $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$

Donc $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$

Donc $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$
 ~ 1
 $n \rightarrow +\infty$

Donc par encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$

Donc $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$

$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n W_n W_n = n W_n^2$

Donc $W_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$, donc $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ ($\sim$ + puissance)

$$(Q5) \text{ D'après } Q4, \sqrt{n} W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{et } \sqrt{n} W_{2n-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi, par Q3 et théorème d'enclenchement :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Donc } I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(Q11) \varphi | [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$$

φ prolongeable en $\mathcal{C}^0$

$$\frac{\overline{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin(x)}}{\underbrace{\sin(x)}_{\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x}} = \frac{\overline{\lim_{x \rightarrow 0^+} x(x^2)}}{x^2 + o(x^2)} = \frac{0(x)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

$$\tilde{\varphi} | [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1/x - 1/\sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^0$ sur $[0; \pi/2]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \pi/2[$

$$\wedge \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\left(\frac{\sin^2(x) - x^2 \cos(x)}{x^2 \sin^2(x)}\right)$$

$\forall x \in]0; \pi/2]$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\sin^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

$$\text{donc } \sin^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \varphi'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(\frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) \times \frac{1}{x^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{-1/6 + o(1)}{1 + o(1)} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} -\frac{1}{6} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pour théorème de la limite de la dérivée, $\widetilde{\varphi}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$