

X-ENS MP 2017 Epreuve A

Thème : Co-réduction de formes symplectiques. Formes symplectiques co-dominées.

Partie I : Bases symplectiques

1. Soient (e_1, \dots, e_n) une base de E et, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, e_k^* la forme linéaire caractérisée par les relations $e_k^*(e_j) = 0$ si $j \neq k$, et $e_k^*(e_k) = 1$. On a, pour tout $u \in E^*$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans E ,

$$e_k^*(x) = x_k \text{ donc } u(x) = \sum_{k=1}^n u(e_k) e_k^*(x) \text{ et}$$

$$u = \sum_{k=1}^n u(e_k) e_k^*$$

Ainsi (e_1^*, \dots, e_n^*) est une famille génératrice de E^* . C'est aussi une famille libre car si

$$\sum_{i=1}^n u_i e_i^* = 0$$

alors $u_k = \left(\sum_{i=1}^n u_i e_i^* \right) (e_k) = 0$. Par conséquent $\dim E^* = n$.

2. Par antisymétrie, $\omega(x, x) = -\omega(x, x)$, d'où $\omega(x, x) = 0$.
 3. (a) Notons B_k le vecteur colonne ${}^t(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (où le 1 est à la k -ième place). Si une telle matrice M existe, alors

$$\omega(b_i, b_j) = {}^t B_i M B_j = M_{i,j}$$

Réciproquement, si l'on définit M comme étant la matrice $(\omega(b_i, b_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour tous $x, y \in E$:

$$\omega(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j \omega(b_i, b_j) = \sum_{i,j} x_i M_{i,j} y_j = {}^t X M Y$$

- (b) On a

$$M_{i,j} = \omega(b_i, b_j) = -\omega(b_j, b_i) = -M_{j,i}$$

Donc ${}^t M = -M$.

- (c) Notons $A_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\begin{aligned} A(E) &\rightarrow A_n(\mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto (\omega(b_i, b_j))_{i,j} \end{aligned}$$

est clairement linéaire. C'est donc d'après (a) un isomorphisme et l'on a

$$\dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En particulier, si $n = 2$, $\dim A(E) = 1$.

- (d) Posons $M = \text{Mat}_B(\omega)$.
 — $(\mathcal{E}_1) \implies (\mathcal{E}_2)$: Supposons (\mathcal{E}_1) . Soit ω une forme symplectique sur E et $x \in E \setminus \{0\}$.
 Puisque ϕ_ω est un isomorphisme, $\phi_\omega(x) \neq 0$, donc il existe $y \in E$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.

- $(\mathcal{E}_2) \implies (\mathcal{E}_3)$: Supposons (\mathcal{E}_2) . Soit X tel que $MX = 0$. Alors, pour tout Y , ${}^tXMY = -{}^t(MX)Y = 0$ d'où, par (\mathcal{E}_2) , $X = 0$. Ceci montre que M est inversible.
- $(\mathcal{E}_3) \implies (\mathcal{E}_1)$: Supposons (\mathcal{E}_3) . Soit $x \in \text{Ker}(\phi_\omega)$ et X le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . Si $\phi_\omega(x) = 0$ alors, pour tout $y \in E$, $\omega(x, y) = 0$. Donc pour tout vecteur colonne Y , ${}^tXMY = 0$. On en déduit ${}^tMX = 0$ puis, M étant inversible, $X = 0$ et $x = 0$. Ainsi ϕ_ω est injective. Comme $\dim E = \dim E^*$, c'est un isomorphisme et ω est une forme symplectique.

4. S'il existe une forme symplectique non nulle sur E , alors il existe d'après les questions précédentes une matrice antisymétrique inversible M dans $M_n(\mathbb{R})$. Comme $\det(M) = \det({}^tM) = \det(-M) = (-1)^n \det(M)$ et $\det(M) \neq 0$, n est pair.

5. Il est clair que ω_0 est une forme bilinéaire. Elle est antisymétrique car J_n est antisymétrique : $\omega_0(Y, X) = {}^tYJ_nX = {}^t({}^tYJ_nX) = {}^tXJ_nY = -{}^tXJ_nY = -\omega_0(X, Y)$. La matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est ω_0 n'est autre que J_n , qui est manifestement inversible. Donc ω_0 est une forme symplectique.

6. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ une base quelconque de E . La matrice de ω dans \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$,

où $a \neq 0$. Dans la base $(\frac{1}{a}b_1, b_2)$, la matrice de ω est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$.

7. (a) Soit G un supplémentaire de F , et $u \in F^*$. On sait qu'il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide avec u sur F et l'application nulle sur G : cette application convient.

(b) La restriction de ω à $F \times F$ est bien sûr une forme bilinéaire alternée. C'est une forme symplectique si $\{x \in F; \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$ est restreint à $\{0\}$, c'est-à-dire $F \cap F^\omega = \{0\}$.

(c) On a bien sûr $\text{Ker}(\psi_F) = F^\omega$. En outre, d'après (a) et parce que ϕ_ω est bijective, $\text{Im}(\psi_F) = F^*$.

(d) Il suffit d'appliquer le théorème du rang à ψ_F .

(e) Si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique, alors F et F^ω sont en somme directe d'après (b). Ce sont donc des supplémentaires d'après (c). Choisissons une base \mathcal{B} de F et une base \mathcal{B}' de F^ω . Soient M et M' les matrices de $\omega|_{F \times F}$ et $\omega|_{F^\omega \times F^\omega}$. Comme $\omega(x, y) = 0$ dès que $(x, y) \in F \times F^\omega$, la matrice de ω dans la base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$. Comme elle est inversible, M' l'est aussi et $\omega|_{F^\omega \times F^\omega}$ est une forme symplectique.

8. On procède par récurrence (de 2 en 2 bien sûr) sur la dimension de E .

- Si E est de dimension 2, la justification a été donnée en 6..

- Soit $n \geq 4$ un entier pair, E de dimension n , et ω une forme symplectique sur E . Soit $a \in E \setminus \{0\}$ puis $b \in E$ tel que $\omega(a, b) \neq 0$. Posons $F = \text{Vect}(a, b)$. D'après 3.(c), toutes les formes bilinéaires alternées non nulles sur F sont des formes symplectiques. Donc $\omega|_{F \times F}$ est une forme symplectique. D'après 7.(e), $F \oplus F^\omega = E$ et $\omega|_{F^\omega \times F^\omega}$ est une forme symplectique. En utilisant 6. et l'hypothèse de récurrence, il existe une base \mathcal{B} de F et une base \mathcal{B}' de F^ω dans lesquelles les matrices de $\omega|_{F \times F}$ et $\omega|_{F^\omega \times F^\omega}$ sont respectivement J_2 et $\text{Diag}(J_2, J_2, \dots, J_2)$ (où le bloc J_2 est répété $n-1$ fois). Dans la base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de E , la matrice de ω est $\text{Diag}(J_2, J_2, \dots, J_2)$ (où le bloc J_2 est répété n fois).

9. Soit (b_1, \dots, b_n) une base dans laquelle la matrice de ω est $\text{Diag}(J_2, J_2, \dots, J_2)$. Dans la base $(e_1, e_3, \dots, e_{n-1}, e_2, e_4, \dots, e_n)$, la matrice de ω est J_n : il existe bien une base dans laquelle la matrice de ω est J_n .

Considérons alors la structure complexe J dont la matrice dans la base ci-dessus est $-J_n$ (on a bien $J^2 = J_n^2 = -I_n$). Pour tout $x \neq 0$ de vecteur colonne coordonnées X , on a

$$\omega(x, J(x)) = {}^tXJ_n(-J_n)X = {}^tXX > 0$$

C'est dire que ω dompte la structure complexe J .

Partie II : Deux outils sur les polynômes

10. La linéarité de $L_{P,Q}$ est immédiate. Supposons P et Q premiers entre eux. Alors $(V, W) \in \text{Ker}(L_{P,Q})$ vérifie $VP + WQ = 0$, donc $P|WQ$ et, puisque P et Q sont premiers entre eux, $P|W$ d'où, puisque $\deg(W) < p = \deg(P)$, $W = 0$ puis $V = 0$. Ainsi, $L_{P,Q}$ est injective. Puisque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie (à savoir $p + q$), $L_{P,Q}$ est un isomorphisme. Supposons réciproquement que $L_{P,Q}$ soit un isomorphisme. Alors il existe (V, W) tel que $VP + WQ = 1$, ce qui montre que P et Q sont premiers entre eux.
11. L'application nulle convient ! On va plutôt construire r telle que $r(P)$ est non nul si et seulement si les racines de P dans \mathbb{C} sont simples. On sait que les racines complexes de $P \in \mathbb{R}_d[X]$ sont simples si et seulement si P et P' sont premiers entre eux, donc si et seulement si l'application $L_{P,P'}$ est un isomorphisme. La matrice de cette application dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_{d-1}[X] \times \mathbb{R}_{d-2}[X]$ et $\mathbb{R}_{2d-2}[X]$ est une matrice dont les coefficients sont des polynômes (de degré au plus 1) en les coefficients de P et dont le déterminant $r(P)$ est aussi une application polynomiale en les coefficients de P . Cette application r convient.
12. Il revient au même de montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide, ce qu'on montre par récurrence sur d . La proposition est immédiate pour $d = 1$. Soit $d \geq 2$ et f polynomiale non nulle à valeurs réelles, définie sur \mathbb{R}^d . Posons

$$f(x_1, \dots, x_d) = f_0(x_1, \dots, x_{d-1}) + f_1(x_1, \dots, x_{d-1})x_d + \dots + f_s(x_1, \dots, x_{d-1})x_d^s$$

Supposons par contraposition qu'il existe $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ intérieur à $f^{-1}(\{0\})$. Alors l'application polynomiale $g : x \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{d-1}, x)$ est nulle au voisinage de a_d . Comme un polynôme non nul en une variable ne possède qu'un nombre fini de racines, g est l'application nulle. Les coefficients $f_k(a_1, \dots, a_{d-1})$ de cette application polynomiale sont donc nuls, et c'est vrai aussi de $f_k(b_1, \dots, b_{d-1})$ pour (b_1, \dots, b_{d-1}) dans un voisinage de (a_1, \dots, a_{d-1}) . Par conséquent, chaque f_k s'annule sur un ensemble d'intérieur non vide. Par l'hypothèse de récurrence, f_k est nulle et f aussi.

Partie III : Réduction simultanée

13. La condition sur u considérée ici équivaut à $\phi_{\omega_1} = \phi_\omega \circ u$. Elle admet une solution u unique, qui est bien un isomorphisme, puisque ϕ_ω et ϕ_{ω_1} sont des isomorphismes. On a alors, pour tout $x, y \in E$:

$$\omega(x, u(y)) = -\omega(u(y), x) = -\omega_1(y, x) = \omega_1(x, y) = \omega(u(x), y).$$

Donc $u \in \mathcal{S}$.

14. (a) La relation $\omega(x, u(y)) = \omega(u(x), y)$ s'exprime matriciellement dans la base $\mathcal{B} : {}^tXJ_4UY = {}^t(UX)J_4Y$. Ceci étant vrai pour tous vecteurs colonnes X et Y :

$$J_4U = {}^tUJ_4.$$

- (b) Écrivons U sous forme de matrice blocs 2×2 : $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. La condition $J_4U = {}^tUJ_4$ se traduit par $D = {}^tA$, ${}^tB = -B$, ${}^tC = -C$. Comme toute matrice antisymétrique de $M_2(\mathbb{R})$ est colinéaire à J_2 , il existe en effet $N \in M_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $U = \begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & {}^tN \end{pmatrix}$.

- (c) Puisque $\det(N - XI_2)$ est le polynôme caractéristique de N , on a

$$T(X) = X^2 - \text{Tr}(N)X + (\det(N) + \alpha\beta).$$

On en déduit :

$$T(U) = \begin{pmatrix} N^2 + \alpha\beta J_2^2 & \alpha(NJ_2 + \beta J_2^t N) \\ \beta(J_2 N + \beta^t N J_2) & {}^t N^2 + \alpha\beta J_2^2 \end{pmatrix} - \text{Tr}(N)U + (\det(N) + \alpha\beta)I_4.$$

Comme $J_2^2 = -I_2$, et $NJ_2 + J_2^t N = {}^t N J_2 + J_2 N = \text{Tr}(N)J_2$, il vient :

$$T(U) = \begin{pmatrix} N^2 - \text{Tr}(N)N + \det(N)I_2 & 0 \\ 0 & N^2 - \text{Tr}(N)N + \det(N)I_2 \end{pmatrix} = 0$$

par le théorème de Cayley-Hamilton.

15. L'expression « u n'admet aucune valeur propre réelle » est impropre car une valeur propre d'un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel ne saurait être autre chose qu'un réel. Disons plutôt que u n'a aucune valeur propre, ou que U n'a aucune valeur propre réelle. Par conséquent, U admet une valeur propre non réelle et T , qui annule U ainsi que toute valeur propre de U , admet une racine non réelle. Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré deux à coefficients réel, T admet deux racines conjuguées non réelles. En particulier, les racines de T sont simples. Puisque T annule U , on sait que cela entraîne que U est diagonalisable sur \mathbb{C} .

Soit $\lambda \in \text{sp}(U)$ (donc $\lambda \notin \mathbb{R}$). Puisque U est réelle, $\bar{\lambda}$ est valeur propre avec la même multiplicité que λ . Comme U admet au plus deux valeurs propres (car U annule T qui est de degré 2), $\text{sp}(U) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$ et ces deux valeurs propres sont de multiplicité 2. Puisque U est diagonalisable, les espaces propres sont de dimension 2. On peut donc choisir Z et $Y \in \mathbb{C}^4$, linéairement indépendants, tels que $UZ = \lambda Z$ et $UY = \lambda Y$.

16. Le couple (Z, Y) est une \mathbb{C} -base de l'espace propre $E_\lambda(U)$, et (\bar{Z}, \bar{Y}) est une base de $E_{\bar{\lambda}}(U)$. Comme \mathbb{C}^4 est somme directe de ces deux espaces propres, (Z, \bar{Z}, Y, \bar{Y}) est une \mathbb{C} -base de \mathbb{C}^4 . Donc $(Z_1, Z_2, Y_1, -Y_2)$ aussi, qui est donc une famille \mathbb{C} -libre et, par conséquent \mathbb{R} -libre : c'est une base de \mathbb{R}^4 et $(z_1, z_2, y_1, -y_2)$ est une base de E .
17. De $J_4 U = {}^t U J_4$ on déduit ${}^t Z J_4 U \bar{Z} = {}^t Z {}^t U J_4 \bar{Z}$ d'où, puisque $UZ = \lambda Z$ et $U\bar{Z} = \bar{\lambda}\bar{Z}$, $\bar{\lambda} {}^t Z J_4 \bar{Z} = \lambda {}^t Z J_4 \bar{Z}$ et, λ n'étant pas réel, ${}^t Z J_4 \bar{Z} = 0$, c'est-à-dire ${}^t Z_1 J_4 \bar{Z}_1 + i {}^t Z_2 J_4 \bar{Z}_1 - i {}^t Z_1 J_4 \bar{Z}_2 + {}^t Z_2 J_4 \bar{Z}_2 = 0$ ou encore

$$\omega(z_1, z_1) + i(\omega(z_2, z_1) - \omega(z_1, z_2)) + \omega(z_2, z_2) = 0.$$

Comme ω est antisymétrique, il vient $\omega(z_1, z_2) = 0$.

On a de la même manière ${}^t Y J_4 \bar{Y} = 0$ et ${}^t Z J_4 \bar{Y} = 0$, d'où $\omega(y_1, y_2) = 0$, $\omega(z_1, y_1) + \omega(z_2, y_2) = 0$ et $\omega(z_2, y_1) - \omega(z_1, y_2) = 0$.

18. Comme ω est symplectique et $\omega(z_1, x) = 0$ pour tout $x \in \text{Vect}(z_1, z_2)$, on a $\omega(z_1, y_1) \neq 0$ ou $\omega(z_1, y_2) \neq 0$, donc ${}^t Z_1 J_4 Y \neq 0$. On peut donc poser $\xi = -\frac{1}{{}^t Z_1 J_4 Y}$, et l'on a ${}^t Z_1 J_4 (\xi Y) = -1$. En substituant ξY à Y , on a bien $\omega(z_1, y_1) = -1$ et $\omega(z_1, y_2) = 0$.

19. Posons $\lambda = a + ib$. Les relations $UZ = \lambda Z$ et $UY = \lambda Y$ se traduisent par

$$\begin{cases} UZ_1 = aZ_1 - bZ_2 \\ UZ_2 = bZ_1 + aZ_2 \end{cases} \quad \begin{cases} UY_1 = aY_1 + b(-Y_2) \\ U(-Y_2) = -bY_1 + a(-Y_2) \end{cases}.$$

La matrice de u dans la base $\tilde{B} = (z_1, z_2, y_1, -y_2)$ est donc

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda = re^{i\theta}$ (avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ car $\lambda \notin \mathbb{R}$), cette matrice s'écrit

$$r \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, les relations $\omega(z_1, y_1) = -1$, $\omega(z_2, -y_2) = \omega(z_1, y_1) = -1$ et $\omega(z_1, -y_2) = \omega(z_2, y_1) = 0$ montrent que le bloc 2×2 « en haut à droite » de la matrice de ω dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est $-I_2$. Comme $\omega(z_1, z_2) = \omega(y_1, y_2) = 0$, la matrice de ω dans $\tilde{\mathcal{B}}$ est bien J_4 .

Enfin, puisque $\omega_1(x, y) = \omega(u(x), y) = {}^t X {}^t U J_4 Y$, la matrice de ω_1 est

$${}^t U J_4 = r \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

20. Comme F_j est le noyau de $P_j(u)$ qui commute avec u , F_j est stable par u . La décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$ résulte du lemme des noyaux.

21. Soit $j, k \in \{1, \dots, r\}$ distincts. Par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $VP_j + WP_k = 1$. On a, pour tous $x \in F_j$ et $y \in F_k$: $\omega(P_j(u)(x), y) = 0$ (car $P_j(u)(x) = 0$) et $\omega(P_k(u)(x), y) = \omega(x, P_k(u)(y)) = 0$. Comme F_j est stable par u , $V(u)(x)$ et $W(u)(x)$ appartiennent à F_j . En appliquant les deux relations précédentes à ces vecteurs, il vient :

$$\omega(P_j(u)(V(u)(x)), y) = 0 \quad \omega(P_j(u)(W(u)(x)), y) = 0,$$

d'où $\omega((P_j V + P_k W)(u)(x), y) = 0$, c'est-à-dire $\omega(x, y) = 0$. En outre, puisque $u(x) \in F_j$, $\omega_1(x, y) = \omega(u(x), y) = 0$. Ceci montre $F_k \subset F_j^\omega$ et $F_k \subset F_j^{\omega_1}$.

22. Considérons une base \mathcal{B}_k de F_k et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$. Comme les F_k sont deux à deux orthogonaux pour ω , la matrice M de ω dans \mathcal{B} est diagonale par blocs $\text{Diag}(M_1, \dots, M_r)$, où M_k est la matrice de la restriction de ω à $F_k \times F_k$. Comme ω est symplectique, M est inversible et chaque M_k est inversible. Donc la restriction de ω à $F_k \times F_k$ est symplectique. Il en va de même pour ω_1 .

23. Supposons que χ_u n'admette aucune racine double dans \mathbb{C} , de sorte que χ_u est le produit de polynômes $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}[X]$ deux à deux premiers entre eux, chacun de l'une des formes suivantes :

$$\begin{cases} X - a, a \in \mathbb{R}^*, \\ (X - a)^2, a \in \mathbb{R}^*, \\ (X - \lambda)(X - \bar{\lambda}), \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \\ (X - \lambda)^2(X - \bar{\lambda})^2, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$$

Posons $F_j = \text{Ker}(P_j(u))$. Les F_j sont stables par u et leur somme directe est égale à E d'après 20.. Soit u_j l'endomorphisme induit par u sur F_j , de sorte que $P_j(u_j) = 0$. On voit matriciellement que $\chi_u = \prod_{i=1}^r \chi_{u_i}$. Puisque $P_j(u_j) = 0$, les valeurs propres réelles ou complexes de u (ou plutôt d'une matrice représentant u ...) sont des racines de P_j . Donc χ_j est premier avec chaque P_k , $k \neq j$. De $\prod_j P_j = \prod_j \chi_j$, on déduit alors (tous ces polynômes sont unitaires) $\chi_j = P_j$ puis $\dim F_j = \deg(P_j) \in \{1, 2, 4\}$. Comme ω induit une forme symplectique sur F_j , F_j est de dimension paire, ce qui exclut $\dim F_j = 1$. Chaque F_j est donc de dimension 2 ou 4 et on conclut par 22..

Apportons une précision : si E est de dimension 2, $A(E)$ est une droite et deux formes symplectiques sont donc proportionnelles. Il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $\omega_1 = a\omega$. On a alors $\phi_{\omega_1} = a\phi_\omega$ donc $\phi_\omega \circ u = a\phi_\omega = \phi_\omega \circ (a\text{Id}_E)$, d'où $u = a\text{Id}_E$ (ce qu'on retrouverait aussi en appliquant les méthodes de 14.). Si l'on applique ceci, dans le cadre de cette question, à l'espace F_j lorsqu'il est de dimension 2, on voit que u_j est une homothétie. En particulier, le polynôme P_j n'est jamais de la forme $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$.

Partie IV : Structures complexes domptées simultanément

24. Supposons que les racines complexes du polynôme caractéristique de u soient de multiplicité au plus 2 et montrons, sous cette hypothèse, que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont simultanément vrais ou faux. Il suffit

d'établir ces énoncés dans le cas où E est de dimension 2 ou 4 car les résultats de **23.**, permettent aisément d'en déduire le cas général (chaque \mathcal{F}_i est vraie sur E si et seulement si les formes restreintes aux F_j la vérifient). Le cas de la dimension 2 est immédiat : ω et ω_1 sont proportionnelles et \mathcal{F}_1 , tout comme \mathcal{F}_2 , est vraie si et seulement si le coefficient de proportionnalité est (strictement) positif.

Supposons donc E de dimension 4 et reprenons le contexte de **19.** Montrons que (si les racines complexes du polynôme caractéristique de u sont de multiplicité au plus 2) \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont tous les deux vrais.

• Pour établir \mathcal{F}_1 , remarquons d'abord que, pour tous vecteurs colonnes X_1, X_2 de \mathbb{R}^2 ,

$$({}^t X_1, {}^t X_2)(-J_4) \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = {}^t X_1 R_\theta X_1 + {}^t X_2 R_\theta X_2 = \cos(\theta)(\|X_1\|_2^2 + \|X_2\|_2^2).$$

Donc la structure complexe de matrice $(-J_4)$ est domptée par la forme symplectique de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\cos(\theta) > 0$.

Effectuons alors le changement de base de matrice $\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix}$, où $\phi \in \mathbb{R}$. La matrice de ω dans cette nouvelle base est

$${}^t \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix} J_4 \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\phi} \\ R_\phi & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de ω_1 est

$$r \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 & -R_{-(\theta+\phi)} \\ R_{\theta+\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

Choisissons ϕ tel que $\cos(\phi) > 0$ et $\cos(\theta + \phi) > 0$ (ça existe). Alors $(-J_4)$ est domptée par ω et par ω_1 .

• Pour tout $t \in [0, 1]$, la matrice

$$(1-t)J_4 + tr \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(1-t)I_2 - R_{-\theta} \\ (1-t)I_2 + R_\theta & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible car $(1-t)I_2 + R_\theta$ l'est (R_θ n'admet pas de valeur propre réelle). D'où \mathcal{F}_2 .

25. Posons $\mathcal{S}_0 = \{u \in L(E); \forall x, y, \omega(x, u(y)) = \omega(u(x), y)\}$, de sorte que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$. L'ensemble \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de $L(E)$, disons de dimension d . Choisissons-en une base et notons x_1, \dots, x_d les coordonnées d'un élément $u \in \mathcal{S}_0$. Les racines complexes de χ_u sont au plus doubles si et seulement si $r(\chi'_u) \neq 0$. L'application $f(x_1, \dots, x_d) = r(\chi'_u)$ est une application polynomiale non nulle sur \mathbb{R}^d . Par **12.**, l'ensemble des $u \in \mathcal{S}_0$ dont le polynôme caractéristique est à racines au plus doubles est dense dans \mathcal{S}_0 . Enfin, puisque $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$, l'ensemble des $u \in \mathcal{S}$ dont le polynôme caractéristique est à racines au plus doubles est dense dans \mathcal{S} .
26. Notons d'abord que si ω et ω_1 domptent une même structure complexe, alors $(1-t)\omega + t\omega_1$ aussi (pour tout $t \in [0, 1]$). Or une forme alternée qui dompte une structure complexe est clairement symplectique. Donc \mathcal{F}_1 implique \mathcal{F}_2 .

Mais en ce qui concerne la réciproque, il semble que la démonstration suggérée par l'énoncé n'aboutisse pas. Supposons en effet \mathcal{F}_2 . Il existe d'après **25.** une suite $(v_k)_{k \geq 2}$ d'éléments de \mathcal{S} qui converge vers u et telle que le polynôme caractéristique de chaque v_k soit à racines au plus doubles. Soit ω_k la forme bilinéaire définie par $\phi_{\omega_k} = \phi_\omega \circ v_k$. C'est une forme symplectique et le segment $[\omega, \omega_k]$ est contenu dans l'ensemble des formes symplectiques dès que k est assez grand.

Par **24.**, il existe, pour k assez grand une structure complexe domptée par ω et ω_k . Si on peut en extraire une sous-suite convergente, on obtient une structure complexe domptée par ω et ω_1 . Mais l'ensemble des structures complexes n'est pas compact (c'est matriciellement la classe de similitude de J_n), pas plus que l'ensemble des structures complexes domptées par ω .

Remarque : *Maxime Bourrigan a porté à mon attention l'article suivant, qui est probablement à l'origine du problème (ou dont la partie qui concerne ce sujet et ce problème ont une origine commune :*

P. Massot, K. Niederkrüger, C. Wendl, Weak and strong fillability of higher dimensional contact manifolds. Invent. Math. 192 (2013), 287–373.

dont la version archiv est ici : <http://arxiv.org/abs/1111.6008>. .