Banque MP inter-ENS – Session 2016
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS de Cachan, ENS de Lyon, ENS de Paris, ENS de Rennes

- **Coefficients (en % du total concours) :**
  — Cachan MPI 9,62 % ; Info 13,16 %
  — Lyon : MPI 10,81 % ; Info/M 12,70 %
  — Paris : MP 3,70 % ; Info 13,33 %
  — Rennes : MPI 9,62 % ; Info 11,43 %

- **Membres du jury :**
  Ludovic Goudenège, Camille Horbez, Jérémy Le Borgne, Thomas Letendre et Camille Tardif

---

L'épreuve de mathématiques C 2016 portait sur le problème du contrôle d'équations différentielles ordinaires et d'une équation aux dérivées partielles (équation de la chaleur). Ce sujet a permis de tester les candidates et les candidats sur leur aisance à manipuler les techniques et les outils classiques d'analyse et d'algèbre linéaire au programme des classes préparatoires aux grandes écoles.

Les notes se sont étalées de 0 à 20 avec une moyenne de 9,75 et un écart-type de 3,96.

De manière générale, le jury a récompensé la précision et la concision des rédactions ainsi que l'honnêteté des candidates et des candidats. A l'inverse, celles et ceux qui ont cherché à imposer leurs résultats à l'aide d'affirmations arbitraires ou d'arguments imprécis, ont été sanctionnés.

Sans prétendre traiter l'intégralité du sujet, on attend tout de même qu'une copie aborde un certain nombre de questions « substantielles » pour obtenir une bonne note. Il ne faut pas hésiter à lire tout le sujet en début d'épreuve, afin d'en avoir une bonne vision d'ensemble.

On rappelle que la présentation entre pour une part importante dans l'appréciation d'une copie. En particulier, les abréviations sont à proscrire et les résultats obtenus doivent être mis en évidence. De même, il est recommandé de décrire les étapes des raisonnements à l'aide de phrases, sans pour autant alourdir excessivement la rédaction.

Concernant les raisonnements par récurrence, le jury apprécierait que les copies en fassent apparaître au moins un rédigé en intégralité avant d'invoquer des « récurrences évidentes ». De même, le caractère fort des récurrences fortes demeure trop souvent implicite.

Le jury précise que le sujet est rédigé de telle sorte que toutes les questions puissent être traitées à l'aide des outils du programme, et il attend des candidates et des candidats qu'ils n'utilisent pas de résultats hors programme sans démonstration. Les arguments basés sur un résultat hors programme non justifié n'ont pas été considérés comme valables.

Partie I

La première partie du sujet était consacrée à démontrer la contrôlabilité d'une équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre n à coefficients constants.

L'application du théorème de Cauchy-Lipschitz à la première question a souvent manqué de soin dans la vérification des hypothèses. La deuxième question demandait d'utiliser un raisonnement classique d'algèbre linéaire, ce qui a été fait dans l'ensemble de manière satisfaisante, malgré l'utilisation de méthodes alternatives pour la preuve de l'injectivité dans de nombreuses copies (une variante basée sur le théorème de Rolle a été fréquemment proposée, mais avec un succès modéré). La quatrième question demandait d'exhiber une fonction résolvant le problème étudié ; trop de copies se sont contentées de proposer une fonction sans prendre la peine d'expliquer même sommairement pourquoi elle convenait. Enfin, la dernière question de cette partie a été très discriminante. Abordée dans peu de copies, elle a généralement donné lieu à des réponses ou justifications partielles : un certain nombre de copies montrent qu'on peut trouver deux fonctions $f \neq g$ vérifiant la conclusion de la question 3, mais le fait que les fonctions u solutions du problème construites à partir de f et g sont bien distinctes est rarement justifié. Les réponses proposant un contre-exemple dans un cas particulier ont été acceptées.

Partie II

La deuxième partie, plus longue que la première, s'appuyait sur celle-ci pour démontrer une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{R}^n$.

Le jury tient à rappeler que le soin et la précision dans les arguments employés font partie intégrante de l'évaluation des copies ; certaines erreurs en apparence bénignes dénotent une certaine confusion sur la nature des objets manipulés. Ainsi, le jury regrette de voir trop souvent des scalaires placés à droite des vecteurs, des produits matrices-vecteurs écrits dans le mauvais sens, ou des mentions de « dimension d'une famille de vecteurs » ou « matrice de A dans une base » alors que A est déjà une matrice.

Encore une fois, la première question, où il fallait appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, a trop souvent souffert d'une rédaction peu détaillée dans les copies. La deuxième question, qui nécessitait la résolution explicite de l'équation considérée, a été dans l'ensemble convenablement traitée, quoiqu'on puisse là encore regretter le manque de soin apporté aux détails (simplification par une matrice sans en mentionner l'inversibilité, par exemple). Dans la quatrième question, il fallait justifier un certain nombre de manipulations avec le produit scalaire, en faisant intervenir notamment sa bilinéarité (en 4.(a)) et sa continuité (en 4.(b)). La question 4.(c) requérait plutôt la linéarité de l'intégrale, mais invoquer la linéarité du produit scalaire était également un argument recevable *via* les sommes de Riemann. Dans tous les cas, de trop nombreux candidates et candidats se sont contentés de faire les interversions nécessaires en 4.(b) et 4.(c) sans justification. De même, dans la question 5, on ne pouvait se donner la formule sans justification, ce qui est arrivé très fréquemment. La question 7 a donné lieu à de très nombreuses rédactions (y compris dans de bonnes copies) faisant apparaître l'écriture « $\det(A - A) = 0$ », ce qui ne peut être perçu comme une application valable du théorème de Cayley-Hamilton. La question 8 a été généralement bien traitée, bien que l'on trouve quelques erreurs dans l'explicitation du changement de base à effectuer. Les questions 9 et 10 ont été traitées de manière variable : les candidates et les candidats ayant traité la question 9 ont généralement réussi à se ramener au problème de la partie I pour conclure, mais la rédaction de la question 10 a parfois manqué de clarté. Par ailleurs, certaines copies proposent en question 9.(b) des systèmes qui ne forment pas un problème de Cauchy.

Partie III

Le but de cette partie était d'introduire la classe des fonctions Gevrey et d'en donner un certain nombre de propriétés élémentaires.

Les quatre premières questions ont généralement été traitées convenablement, même si on note souvent un certain manque de soin dans les majorations proposées. L'utilisation du fait qu'une fonction continue sur un segment y est bornée donnait lieu à une rédaction nettement plus élégante pour la question 2 qu'une solution basée sur l'écriture d'un polynôme avec ses coefficients. L'erreur la plus fréquente pour les questions 3 et 4 a été l'utilisation d'une « constante » pour la majoration qui dépendait en fait de n. Un certain nombre de candidates et de candidats se contentent en question 3 de donner la majoration des dérivées d'une combinaison linéaire, mais oublient de mentionner qu'ils montrent ainsi que $\mathcal{G}^s([0,T])$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty([0,T])$. La cinquième question, plus difficile, consistait à montrer que l'inverse d'une fonction Gevrey ne s'annulant pas était Gevrey. Le résultat de la 5.(a) s'obtenait par application directe de la formule de Leibniz, mais de nombreuses copies font apparaître une tentative de démonstration par récurrence (ce qui est possible, mais technique), et cette méthode a rarement abouti. La question 5.(b) a souvent été ignorée dans les copies. La 5.(c) a généralement été convenablement traitée une fois admis les résultats précédents.

Partie IV

Le but de cette partie était de démontrer qu'une certaine fonction plateau était dans la classe de Gevrey d'ordre 3/2, et utilisait notamment les résultats de la partie III.

Dans la première question, l'argument consistant à donner la forme générale de la dérivée k-ème de la fonction étudiée sans justification n'a pas été considéré comme suffisant. La question 2, qui nécessitait l'application du théorème de la limite de la dérivée, a souvent été traitée sans soin : beaucoup ont cru que le résultat découlait automatiquement de la question précédente, sans comprendre qu'il fallait appliquer le théorème de la limite de la dérivée (ou utiliser l'inégalité des accroissements finis). La troisième question demandait également du soin : parmi celles et ceux qui font l'effort de justifier l'interversion série-intégrale, on note souvent un manque de précision sur l'invocation de la convergence uniforme ou bien sur les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. L'intégrabilité (continuité) des termes sommés est elle aussi très rarement mentionnée. La question 4.(b), plus difficile et très discriminante, a été traitée dans assez peu de copies, et rares sont celles où la sommabilité de la famille introduite a été convenablement justifiée. La question 4.(c) s'est également révélée assez discriminante, du fait d'un manque fréquent de précision (notamment au moment de justifier l'utilisation des résultats des questions précédentes). La question 4.(d) a été traitée dans peu de copies. La majoration de l'intégrande demandait d'être assez soigneux ; le calcul explicite de son module (*via* un calcul de partie réelle) a rarement été bien maîtrisé. La fin de la partie a été abordée dans très peu de copies, alors que les questions 5 et 6 étaient relativement faciles.

Partie V

Cette partie, qui utilisait les résultats de la précédente pour s'intéresser au problème du contrôle de l'équation de la chaleur, n'a été abordée que dans assez peu de copies.

Les premières questions, indépendantes des résultats de la partie IV, étaient pourtant accessibles. La première question a tout de même été généralement traitée de manière convenable par celles et ceux qui l'ont abordée, au contraire de la deuxième qui demandait davantage de justifications et de précisions. Il n'y avait pas vraiment de sens à aborder la troisième question sans avoir montré au préalable la dérivabilité terme à terme de la série considérée. La dernière question n'a quasiment pas été traitée.

⋆ ⋆
⋆