CORRIGÉ EPREUVE C ENS MP 2016 (ULRC)

1 Équation différentielle scalaire

1. Cette équation différentielle est linéaire scalaire d'ordre n avec les fonctions u et $(t \mapsto a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ qui sont continues sur l'intervalle $[0, T]$ et $(0, c_0, ..., c_{n-1}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. L'application du théorème de Cauchy-Lipschitz prouve l'existence et l'unicité de la fonction f qui est, par définition, n fois dérivable sur $[0, T]$ et comme $f^{(n)} = u - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} \in C^0([0, T], \mathbb{R})$, on peut affirmer que $f \in C^n([0, T], \mathbb{R})$.

2. L est clairement linéaire et comme $\dim(\mathbb{R}_{2n-1}[X]) = 2n = \dim(\mathbb{R}^{2n})$, il suffit de montrer que L est injective, i.e. $\ker(L) = \{0\}$, pour démontrer qu'il s'agit d'un isomorphisme. Soit $P \in \ker(L)$ alors $\forall k \in \{0, ..., n-1\}, \quad P^{(k)}(0) = P^{(k)}(T) = 0$ donc 0 et T sont racines d'ordre au moins n de P. Puisque $0 \neq T$, on en déduit que P admet au moins $n + n = 2n$ racines (en comptant la multiplicité) et comme $\deg(P) < 2n$, on peut affirmer que $P = 0$ d'où $\ker(L) = \{0\}$.

3. Soit $P_0 = L^{-1}(c_0, ..., c_{n-1}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et vérifie $\forall k \in \{0, ..., n-1\}, P^{(k)}(0) = c_k$ et $P^{(k)}(T) = 0$. Sa fonction associée f est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie les conditions demandées.

4. Soit f la fonction obtenue à la question précédente et $u = f^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} \in C^0([0, T], \mathbb{R})$ alors f est solution de (Σ) et vérifie $f^{(k)}(T) = 0$ pour $k = 0, ..., n-1$.

5. On pose $\left| \begin{array}{cccc} L_1 : & C^\infty([0, T], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{2n} \\ & f & \mapsto & \left(f(0), ..., f^{(n-1)}(0), f(T), ..., f^{(n-1)}(T)\right) \end{array} \right.$ qui est linéaire et surjective (d'après la question 3 en identifiant les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ à leur fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$). Si $f \in C^\infty([0, T], \mathbb{R})$ alors $P = L^{-1}(L_1(f)) \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $f - P \in \ker(L_1)$, on en déduit aisément que $C^\infty([0, T], \mathbb{R}) = \mathbb{R}_{2n-1}[X] \oplus \ker(L_1)$ donc $\ker(L_1)$ est de dimension infinie (car $C^\infty([0, T], \mathbb{R})$ l'est mais pas $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$). L'application linéaire $\left| \begin{array}{cccc} H : & \ker(L_1) & \to & C^0([0, T], \mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} \end{array} \right.$ est non identiquement nulle (son noyau est un sous-espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$ qui est de dimension n (via Cauchy-Lipschitz). Ainsi, son noyau est aussi un espace vectoriel de dimension finie qui ne peut être égal à $\ker(L_1)$ car celui-ci est de dimension infinie). L'espace vectoriel $\mathrm{Im}(H)$ est non nul donc infini (et même de dimension infinie). Soit f_0 la fonction obtenue à la question 1.4 alors, pour toute fonction $g \in \ker(L_1)$, la fonction $f_g = f_0 + g$ vérifie :

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, \quad (f_g)^{(k)} = c_k, \quad (f_g)^{(k)}(T) = 0$$

et la fonction $u = H(f_0 + g) = H(f_0) + H(g)$ convient pour la Proposition 1. Comme l'ensemble $\{H(f_0) + H(g), \quad g \in \ker(L_1)\} = \{H(f_0) + h, \quad h \in \mathrm{Im}(H)\}$ est infini, on en déduit que la fonction u n'est pas unique.

2 Système différentiel

1. Soit $u \in C^0([0, T], \mathbb{R})$ et $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Le problème (2.1) est un problème de Cauchy linéaire associé aux fonctions $t \mapsto A$ et $t \mapsto u(t) b$ qui sont continues sur $[0, T]$ et $(0, y^0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ donc le théorème de Cauchy-Lipschitz démontre l'existence et l'unicité de la solution à (2.1). Par définition, cette solution y est dérivable sur $[0, T]$ et $y' = Ay + ub \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ donc $y \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

2. Soit y une telle solution, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{-At} y(t)\right) &= e^{-At}(-A) y(t) + e^{-At} y'(t) = e^{-At}(-Ay(t) + y'(t)) \\ &= e^{-At} u(t) b \underset{u(t) \in \mathbb{R}}{=} u(t) e^{-At} b. \end{aligned}$$

(on mime la variation de la constante qui reste valable en dimension finie dans le cas des matrices à coefficients constants). En intégrant cette relation sur $[0,T]$, on obtient :

$$e^{-AT}y(T)-e^{-A0}y(0)=\int_0^T u(t)\,e^{-At}bdt \Leftrightarrow y(T)=e^{AT}\left(y^0+\left(\int_0^T u(t)\,e^{-At}bdt\right)\right)=\Phi(A,b,u).$$

3. Le polynôme caractéristique χ_A annule A (théorème de Cayley-Hamilton) et est de degré n. Soit $k\in\mathbb{N}$, la division euclidienne de X^k par χ_A fournit l'égalité $X^k=\chi_A(X)\,Q_k(X)+P_k(X)$ avec $\deg(P_k)<\deg(\chi_A)=n$ (i.e. $P_k\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$) donc $A^k=\chi_A(A)\,Q_k(A)+P_k(A)=P_k(A)$.

4. (a) La famille $\left(b,Ab,...,A^{n-1}b\right)$ est de cardinal n et n'est pas une base de $\mathbb{R}^n$ donc ce n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ i.e. $F=\operatorname{Vect}\left(b,Ab,...,A^{n-1}b\right)\subsetneq\mathbb{R}^n$ et on a $F^\perp\neq\{0\}$. Soit $z\in F\backslash\{0\}$ alors, en utilisant la question 2.3 :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad A^kb=P_k(A)\,b\in\operatorname{Vect}\left(b,Ab,...,A^{n-1}b\right)=F\Rightarrow\left\langle z,A^kb\right\rangle=0.$$

(b) Soit $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\langle z,\exp(At)\,b\rangle=\left\langle z,\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^kt^k}{k!}b\right\rangle=\left\langle z,\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{A^kt^k}{k!}b\right\rangle\underset{(*)}{=}\lim_{N\to+\infty}\left\langle z,\sum_{k=0}^{N}\frac{A^kt^k}{k!}b\right\rangle=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\left\langle z,A^kb\right\rangle=0$$

$(*)$: $y\in\mathbb{R}^n\mapsto\langle z,y\rangle$ est continue (soit utiliser Cauchy-Schwarz, soit linéaire en dimension finie).

(c) On procède par l'absurde en supposant qu'il existe une fonction $u\in C^0([0,T],\mathbb{R})$ pour laquelle la solution de (2.1) vérifie $y(T)=0$. D'après la question 2.2, on a :

$$y(T)=0\Leftrightarrow y^0+\int_0^T u(t)\,e^{-At}bdt=0\Leftrightarrow y^0=-\int_0^T u(t)\,e^{-At}bdt\underset{(*)}{\Rightarrow}\left\langle z,y^0\right\rangle=-\int_0^T u(t)\underbrace{\left\langle z,e^{-At}b\right\rangle}_{=0}dt=0$$

ce qui est absurde.
$(*)$: En effet, soit $f:[a,b]\to E$ où $(E,\langle .,.\rangle)$ est un espace euclidien (donc un espace vectoriel normé de dimension finie), par définition de l'intégration de fonctions à valeurs vectoriels, on a $\int_a^b f(t)\,dt=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\int_a^b f_i(t)\,dt$ où $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de de E et, pour tout $t\in[a,b]$, $(f_1(t),...,f_n(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ donc :

$$\left\langle v,\int_a^b f(t)\,dt\right\rangle=\sum_{i=1}^n\langle v,\varepsilon_i\rangle\int_a^b f_i(t)\,dt=\int_a^b\sum_{i=1}^n\langle v,\varepsilon_i\rangle f_i(t)\,dt=\int_a^b\left\langle v,\sum_{i=1}^n\varepsilon_if_i(t)\right\rangle dt=\int_a^b\langle v,f(t)\rangle\,dt.$$

(d) Supposons que (E_2) est vérifiée. Si $\left(b,Ab,...,A^{n-1}b\right)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^n$, d'après la question 2.4.a, il existe $y^0\in\mathbb{R}^n$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\left\langle z,A^kb\right\rangle=0$. D'après la question 2.4.c, il n'existe pas de fonction $u\in C^0([0,T],\mathbb{R})$ pour laquelle la solution de (2.1) vérifie $y(T)=0$ ce qui contredit (E_1) donc $\left(b,Ab,...,A^{n-1}b\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ d'où (E_1) est vérifiée. Par conséquent, on vient d'établir que $(E_2)\Rightarrow(E_1)$.

5. En itérant la relation proposée, on obtient

$$\begin{aligned}v_{n-1}&=Av_n+a_{n-1}v_n=Ab+a_{n-1}b,\\ v_{n-2}&=Av_{n-1}+a_{n-2}v_n=A^2b+a_{n-1}Ab+a_{n-2}b,\\ v_{n-3}&=Av_{n-2}+a_{n-3}v_n=A^3b+a_{n-1}A^2b+a_{n-2}Ab+a_{n-3}b.\end{aligned}$$

On conjecture rapidement que

$$(\mathcal{H}_k):v_{n-k}=A^kb+a_{n-1}A^{k-1}b+a_{n-2}A^{k-2}b+\cdots+a_{n-k}b.$$

L'initialisation $k=1$ est immédiate et pour l'hérédité, supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour un certain $k \in \{1,...,n-2\}$ alors on a $k+1 \leqslant n-1$ donc :

$$\begin{aligned} v_{n-(k+1)} &= v_{n-k-1} = Av_{n-k} + a_{n-k-1}v_n = A\left(A^k b + a_{n-1}A^{k-1}b + a_{n-2}A^{k-2}b + \cdots + a_{n-k}b\right) + a_{n-k-1}b \\ &= A^{k+1}b + a_{n-1}A^k b + a_{n-2}A^{k-1}b + \cdots + a_{n-k-1}b \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{k+1})$ et achève la récurrence. Par conséquent, $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour $k \in \{1,...,n-1\}$ donc, on posant $j = n-k$, on a :

$$\forall j \in \{1,...,n-1\}, \quad v_j = A^{n-j}b + a_{n-1}A^{n-j-1}b + a_{n-2}A^{n-j-2}b + \cdots + a_j b \text{ et } v_n = b.$$

6. On pose $F = \operatorname{Vect}\{v_1,...,v_n\}$. On procède par récurrence forte en posant, pour tout $j \in \{0,...,n-1\}$, $(\mathcal{H}_j) : A^j b \in F$. Il est immédiat que $(\mathcal{H}_0)$ est vraie. Soit $j \in \{1,...,n-2\}$. Supposons que $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour tout $k \in \{0,...,j\}$ alors, d'après la question précédente, on a :

$$A^{j+1}b = \underbrace{v_{n-(j+1)}}_{\in F \text{ car } 1 \leqslant n-(j+1) \leqslant n} - \sum_{i=0}^{j} a_{n-j-1+i} \underbrace{A^i b}_{\in F \text{ car } 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1} \in F$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{j+1})$ et achève la récurrence. On en déduit que :

$$\mathbb{R}^n \underset{(E_1)}{=} \operatorname{Vect}\left(b, Ab, ..., A^{n-1}b\right) \subset \operatorname{Vect}\{v_1,...,v_n\} \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \operatorname{Vect}\{v_1,...,v_n\} = \mathbb{R}^n.$$

Puisque la famille $(v_1,...,v_n)$ est de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ et qu'elle est génératrice, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

7. D'après la question 2.5, on a :

$$\begin{aligned} v_1 &= A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + a_{n-2}A^{n-3}b + \cdots + a_1 b \\ Av_1 &= A^n b + a_{n-1}A^{n-1}b + a_{n-2}A^{n-2}b + \cdots + a_1 Ab = (\chi_A(A) - a_0 \operatorname{Id})\, b \underset{\text{Hamilton}}{\overset{\text{Cayley-}}{=}} -a_0 b = -a_0 v_n. \end{aligned}$$

8. Soit l'application linéaire $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$. Puisque l'on a :

$$\varphi(v_1) = -a_0 v_n, \quad \forall k \in \{2,...,n\}, \quad \varphi(v_k) = Av_k = v_{k-1} - a_{k-1}v_n,$$

sa matrice $\widetilde{A}$ dans la base $(v_1, v_2, ..., v_n)$ est :

$$\widetilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(v_1) & \varphi(v_2) & \varphi(v_3) & & \varphi(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array}.$$

La matrice de φ dans la base canonique est .... A ($\varphi(e_i) = AE_{i,i} = C_i$ la i-ième colonne de A) et la matrice des coordonnées de $b = v_n = 0v_1 + \cdots + 0v_{n-1} + 1v_n$ dans la base $(v_1,...,v_n)$ est $\widetilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si on note U la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $(v_1,...,v_n)$ qui est une matrice inversible alors, d'après les formules de changement de base, on a $\widetilde{A} = U^{-1}AU$ et $U^{-1}b = \widetilde{b}$.

9. (a) L'application $c \in \mathbb{R}^n \mapsto U^{-1}c$ étant linéaire, on a pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= U^{-1}y'(t) = U^{-1}(Ay(t) + u(t)\, b) \overset{u(t) \in \mathbb{R}}{=} U^{-1}Ay(t) + u(t)\, U^{-1}b \\ &= \widetilde{A}U^{-1}y(t) + u(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{A}F(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(0) = U^{-1}y^0. \end{aligned}$$

(b) On pose $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ (avec $f_1 = f$) alors la question précédente montre que :

$$\forall t \in [0,T], \quad \left\{ \begin{array}{c} f_1'(t) = f_2(t) \\ f_2'(t) = f_3(t) \\ \vdots \\ f_{n-1}'(t) = f_n(t) \\ f_n'(t) = -\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} f_k(t) + u(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f_2(t) = f_1'(t) \\ f_3(t) = f_1''(t) \\ \vdots \\ f_n(t) = f_1^{(n-1)}(t) \\ f_1^{(n)}(t) = -\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} f^{(k-1)}(t) + u(t) \end{array} \right.$$

donc f vérifie l'équation différentielle $y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(t) = u(t)$. En outre, on a $F(0) = U^{-1}y^0$ donc, si on pose $U^{-1}y^0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} f_1(0) = c_0 \\ f_2(0) = c_1 \\ \vdots \\ f_n(0) = c_{n-1} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(0) = c_0 \\ f'(0) = c_1 \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \end{array} \right.$$

ce qui prouve que f vérifie le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,T] \\ y^{(k)}(0) = c_k, \quad \forall k \in \{0, ..., n-1\} \end{array} \right. .$$

10. Il existe $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\widetilde{A} = U^{-1}AU$. Soit $y^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $(c_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ tel que $U^{-1}y^0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$.

D'après la Proposition 1, il existe $u \in C^0([0,T], \mathbb{R})$ tel que la solution f du système

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{l} f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 f(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,T], \\ f^{(k)}(0) = c_k \ \textit{pour} \ k = 0, ..., n-1, \end{array} \right.$$

vérifie $f^{(k)}(T) = 0$ pour $k = 0, ..., n-1$. On pose alors $z : t \in [0,T] \mapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ qui est clairement dérivable sur $[0,T]$ et vérifie, pour tout $t \in [0,T]$:

$$z'(t) = \widetilde{A} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (Uz(t))' = A(Uz(t)) + u(t) U \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y'(t) = Ay(t) + u(t) b$$

si l'on pose $y = Uz$. En outre, on a $z(0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = U^{-1}y^0$ donc $y(0) = y^0$ et $y(T) = \begin{pmatrix} f(T) \\ f'(T) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(T) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow z(T) = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc (E_2) est vérifiée, ce qui prouve l'implication $(E_1) \Rightarrow (E_2)$.

3 Classe de Gevrey : résultats généraux

1. Il est immédiat que $g \in C^{\infty}([0,T],\mathbb{R})$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,T], \quad \left|g^{(n)}(t)\right| = \left|(-1)^n f^{(n)}(T-t)\right| = \left|f^{(n)}(T-t)\right| \leqslant \frac{M(n!)^s}{R^n}$$

donc $g \in \mathcal{G}^s(0,T)$.

2. Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, \quad f^{(n)} = 0$. Pour chaque $k \in \{0,...,N\}$, $f^{(k)}$ est continue sur le segment $[0,T]$ donc elle y est bornée, ce qui assure l'existence de $M = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant N}\left(\frac{1}{(k!)^s}\sup\limits_{t\in[0,T]}\left|f^{(k)}(t)\right|\right)$.
Il est alors immédiat que :

$$\forall t \in [0,T], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\left|f^{(n)}(t)\right|}{n!} \leqslant M \Leftrightarrow \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant M(n!)^s = \frac{M(n!)^s}{1^n}$$

ce qui assure que $f \in \mathcal{G}^s(0,T)$.

3. $\mathcal{G}^s(0,T) \subset C^{\infty}([0,T],\mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $0_{C^{\infty}([0,T],\mathbb{R})} \in \mathcal{G}^s(0,T)$ (car c'est une fonction polynomiale par exemple). Soient $f,g \in \mathcal{G}^s(0,T)$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, il existe $M,R,M',R' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\begin{aligned}
&\forall t \in [0,T], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \frac{M(n!)^s}{R^n}, \quad \left|g^{(n)}(t)\right| \leqslant \frac{M'(n!)^s}{(R')^n} \Rightarrow \\
&\left|(\lambda f+\mu g)^{(n)}(t)\right| = \left|\lambda f^{(n)}(t)+\mu g^{(n)}(t)\right| \leqslant |\lambda|\left|f^{(n)}(t)\right| + |\mu|\left|g^{(n)}(t)\right| \\
&\leqslant (n!)^s\left(\frac{|\lambda| M}{R^n}+\frac{|\mu| M'}{(R')^s}\right) \leqslant (n!)^s\left(\frac{|\lambda| M+|\mu| M'}{\min(R,R')^n}\right)
\end{aligned}$$

donc $\lambda f+\mu g \in \mathcal{G}^s(0,T)$ ce qui prouve que $\mathcal{G}^s(0,T)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Soit $f_1,f_2 \in \mathcal{G}^s(0,T)$ alors f_1,f_2 appartiennent à $C^{\infty}([0,T],\mathbb{R})$ donc f_1f_2 aussi. il existe $M_1,R_1,M_2,R_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\begin{aligned}
\forall t &\in [0,T], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f_1^{(n)}(t)\right| \leqslant \frac{M_1(n!)^s}{(R_1)^n}, \quad \left|g^{(n)}(t)\right| \leqslant \frac{M_2(n!)^s}{(R_2)^n} \Rightarrow \\
\left|(f_1f_2)^{(n)}(t)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_1^{(k)}(t)\,f_2^{(n-k)}(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|f_1^{(k)}(t)\right|\left|f_2^{(n-k)}(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{M_1(k!)^s}{(R_1)^k}\times\frac{M_2((n-k)!)^s}{(R_2)^{n-k}} \\
&= M_1M_2(n!)^s\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k!(n-k)!}{n!}\right)^s\frac{1}{(R_1)^k(R_2)^{n-k}} = M_1M_2(n!)^s\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{\underbrace{\binom{n}{k}^s}_{\geqslant 1}}\frac{1}{(R_1)^k(R_2)^{n-k}} \\
&\leqslant M_1M_2(n!)^s\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(R_1)^k(R_2)^{n-k}} = M_1M_2(n!)^s\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^n
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure à $f_1f_2 \in \mathcal{G}^s(0,T)$.

5. (a) Puisque $f \times \frac{1}{f} = 1$ alors, pour $n \geqslant 1$, la formule de Leibniz montre que :

$$0 = 1^{(n)} = \left(f\times\frac{1}{f}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\left(\frac{1}{f}\right)^{(n-k)} = \underbrace{\binom{n}{0}f^0}_{=f}\left(\frac{1}{f}\right)^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\left(\frac{1}{f}\right)^{(n-k)}.$$

On conclut en isolant $f^{(n)}$ et en divisant par f.

(b) Puisque $1-s \leqslant 0$ et que $\binom{n}{k} \geqslant 1$, on a $\binom{n}{k}^{1-s} \leqslant 1$ donc, pour $x \in]0,1[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{1-s}x^k \leqslant \sum_{k=1}^{n}x^k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}x^k = \frac{x}{1-x}\underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Puisque $\dfrac{\delta}{M}>0$, il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x\in[0,\alpha]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{1-s}x^k\leqslant\frac{\delta}{M}$ ce qui permet de conclure ($\varepsilon=\alpha$ convient).

(c) Prouvons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $(\mathcal{H}_n)$: $\forall t\in[0,T]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|f^{(n)}(t)\right|\leqslant\dfrac{(n!)^s}{\delta(\varepsilon R)^n}$.
Pour $n=0$, on a sur $[0,T]$,

$$f\geqslant\delta>0\Rightarrow\left|\frac{1}{f}\right|=\frac{1}{f}\leqslant\frac{1}{\delta}=\frac{(0!)^s}{\delta(\varepsilon R)^0}$$

ce qui prouve $(\mathcal{H}_0)$. Soit $n\geqslant1$ et supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour tout entier $k<n$ alors, pour tout $t\in[0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}(t)\right| &\underset{3.5.a)}{=}\left|-\frac{1}{f}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\left(\frac{1}{f}\right)^{(n-k)}\right|=\frac{1}{f}\left|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\left(\frac{1}{f}\right)^{(n-k)}\right|\\ &\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left|f^{(k)}\right|\left|\left(\frac{1}{f}\right)^{(n-k)}\right|\underset{\text{car } n-k<n}{\overset{\text{d'après }(\mathcal{H}_{n-k})}{\leqslant}}\frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{M(k!)^s}{R^k}\times\frac{((n-k)!)^s}{\delta(\varepsilon R)^{n-k}}\\ &=\frac{M(n!)^s}{\delta^2(\varepsilon R)^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k!(n-k)!}{n!}\right)^s\varepsilon^k=\frac{M(n!)^s}{\delta^2(\varepsilon R)^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{1-s}\varepsilon^k\underset{3.5.b)}{\leqslant}\frac{M(n!)^s}{\delta^2(\varepsilon R)^n}\times\frac{\delta}{M}=\frac{(n!)^s}{\delta(\varepsilon R)^n}\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_n)$ et permet de conclure d'où $\dfrac{1}{f}\in\mathcal{G}^s(0,T)$.

4 Classe de Gevrey : exemples

1. La fonction h est de classe C^∞ sur $]0,T]$ (car $t\mapsto-\dfrac{1}{t^2}$ l'est et exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$). Prouvons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$ la propriété :

$$(\mathcal{H}_k):\ \exists P_k\in\mathbb{R}[X],\quad\forall t\in]0,T],\quad h^{(k)}(t)=P_k\left(\frac{1}{t}\right)h(t)\ .$$

Pour $k=0$, le polynôme $P_0=1$ convient. Supposons la propriété vraie pour un entier k alors, pour tout $t\in]0,T]$, on a :

$$h^{(k+1)}(t)=\left(h^{(k)}(t)\right)'=\left(P_k\left(\frac{1}{t}\right)h(t)\right)'=-\frac{1}{t^2}P_k'\left(\frac{1}{t}\right)h(t)+P_k\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{2}{t^3}\right)h'(t)=P_{k+1}\left(\frac{1}{t}\right)h(t)$$

si l'on choisit $P_{k+1}(X)=-X^2P_k'(X)+2X^3P_k(X)\in\mathbb{R}[X]$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{k+1})$ et achève la récurrence. On en déduit que :

$$h^{(k)}(t)=P_k\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t^2}}\underset{t\to0^+\Leftrightarrow x\to+\infty}{\overset{x=1/t^2}{=}}P_k\left(\sqrt{x}\right)e^{-x}\underset{x\to+\infty}{\sim}a_{n_k}\left(\sqrt{x}\right)^{n_k}e^{-x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$$

par les croissances comparées. $(*)$: n_k désigne le degré de P_k et a_k son coefficient dominant

2. On a établi à la question précédente que $h\in C^\infty(]0,T],\mathbb{R})$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{0^+}h^{(k)}=0$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée (ou limite de la dérivée), on peut affirmer que $h\in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$.

3. Soit $r\in]0,\rho[$, on a :

$$\forall\theta\in[0,2\pi],\quad\frac{F\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n}=\frac{1}{\left(re^{i\theta}\right)^n}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\left(re^{i\theta}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\left(re^{i\theta}\right)^{k-n}.$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, posons $F_k:\theta\mapsto a_k\left(re^{i\theta}\right)^{n-k}$ qui est continue sur $[0,2\pi]$. En outre, on a :

$$\sum_{k\geqslant0}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|F_k(\theta)\right|=\sum_{k\geqslant0}|a_k|\,r^{k-n}=\frac{1}{r^n}\sum_{k\geqslant0}|a_k|\,r^k.$$

Puisque la série $\sum_{k} a_k z^k$ a pour rayon de convergence ρ et que $r < \rho$, on peut affirmer que la série $\sum_{k\geqslant 0} |a_k| r^k$ converge (convergence absolue à l'intérieur du disque ouvert de convergence). Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} F_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$, ce qui permet de permuter les symboles série et intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} F_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} F_k \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{F\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^{k-n} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta.$$

Pour $m = 0$, on a $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$ et si $m \neq 0$, on a : $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = \left[\frac{e^{im\theta}}{im}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$ (car $\theta \mapsto e^{im\theta}$ est 2π-périodique), ce qui nous fournit l'égalité :

$$\int_0^{2\pi} \frac{F\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n} d\theta = a_n r^{n-n} 2\pi = 2\pi a_n$$

4. (a) Pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a $e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}$ donc, pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \{t_0\}$, on a :

$$e^{-\frac{1}{(t_0-z)^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{(t_0-z)^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(t_0-z)^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \left(t_0\left(1-\frac{z}{t_0}\right)\right)^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! t_0^{2n}} \frac{1}{\left(1-\frac{z}{t_0}\right)^{2n}}.$$

(b) Pour tout $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| < 1$, on a : $\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{+\infty} w^k$. Fixons $w \in \mathbb{C}^*$ alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-tw}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence $R = \frac{1}{|w|}$ car :

$$\forall t \in \left]-R, R\right[,\ \frac{1}{1-tw} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k w^k$$

En dérivant terme à terme n fois cette série entière (ce qui est licite à l'intérieur du disque ouvert de convergence), on obtient :

$$(\mathcal{D}) : \forall t \in \left]-R, R\right[,\ \frac{n! w^n}{(1-tw)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, t^{k-n} w^k$$

Si $|w| < 1$ alors, en choisissant $t = 1$ dans la formule ci-dessus, en divisant pas w^n et en effectuant le changement d'indice $i = k - n$, on en déduit la formule :

$$\forall w \in \mathbb{C} \text{ avec } |w| < 1,\ \frac{1}{(1-w)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)(k+n-1)\cdots(k+1)\, w^k.$$

En utilisant la question précédente, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < t_0$:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{(t_0-z)^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! t_0^{2n}} \frac{1}{\left(1-\frac{z}{t_0}\right)^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! t_0^{2n}} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2n-1)(k+2n-2)\cdots(k+1) \left(\frac{z}{t_0}\right)^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (k+2n-1)(k+2n-2)\cdots(k+1)}{n!\,(2n-1)!\,(t_0)^{2n}} \left(\frac{z}{t_0}\right)^k \end{aligned}$$

Prouvons que la famille de complexes

$$(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} = \left(\frac{(-1)^n (k+2n-1)(k+2n-2)\cdots(k+1)}{n!\,(2n-1)!\,(t_0)^{2n}} \left(\frac{z}{t_0}\right)^k\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable en utilisant le théorème de Fubini. Soit $n \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{k\geqslant 0} |a_{n,k}| = \frac{1}{n!\,(2n-1)!\,|t_0|^{2n}} \sum_{k\geqslant 0} (k+2n-1)(k+2n-2)\cdots(k+1)\left|\frac{z}{t_0}\right|^k$$

converge (car $\left|\frac{z}{t_0}\right| < 1$ d'après $(\mathcal{D})$). Posons :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{n,k}| = \frac{1}{n!\,(2n-1)!\,|t_0|^{2n}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2n-1)(k+2n-2)\cdots(k+1)\left|\frac{z}{t_0}\right|^k \\ &= \frac{1}{n!\,|t_0|^{2n}} \times \frac{1}{\left(1-\left|\frac{z}{t_0}\right|\right)^{2n}} \text{ (d'après } (\mathcal{D})\text{)} = \frac{1}{n!\left((|t_0|-|z|)^2\right)^n}. \end{aligned}$$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!\left((|t_0|-|z|)^2\right)^n}$ converge (série exponentielle de rayon de convergence infini), on en déduit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} S_n$ converge donc la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable lorsque $|z| < t_0$. D'après le théorème de Fubini, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < t_0$:

$$e^{-\frac{1}{(t_0-z)^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (k+2n-1)(k+2n-2)\cdots(k+1)}{n!\,(2n-1)!\,(t_0)^{2n+k}}}_{=a_k}.$$

(c) D'après la question précédente, la fonction $g : z \mapsto h(t_0 - z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ étant développable en série entière avec un rayon de convergence $R \geqslant t_0$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \quad &\in \quad \mathbb{N}, \quad \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = a_n \Leftrightarrow \frac{(-1)^n h^{(n)}(t_0)}{n!} = a_n \Rightarrow \\ \left|\frac{h^{(n)}(t_0)}{n!}\right| &= |a_n| \underset{4.3}{=} \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n} d\theta\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{1}{(t_0-re^{i\theta})^2}}}{\left(re^{i\theta}\right)^n} d\theta\right| \end{aligned}$$

(d) D'après la question précédente et en tenant compte que $r = \dfrac{t_0}{3} \Leftrightarrow t_0 = 3r$, on a pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \left|\frac{h^{(n)}(t_0)}{n!}\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left|\left(re^{i\theta}\right)^n\right|}\left|e^{-\frac{1}{(3r-re^{i\theta})^2}}\right| d\theta = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left|\exp\left(-\frac{1}{r^2\left(3-e^{i\theta}\right)^2}\right)\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \exp\left(\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{r^2\left(3-e^{i\theta}\right)^2}\right)\right) d\theta = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{r^2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\left(3-e^{i\theta}\right)^2}\right)\right) d\theta \end{aligned}$$

La fonction

$$\psi : \theta \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\left(3-e^{i\theta}\right)^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\left(3-e^{i\theta}\right)^2}}{\left|\left(3-e^{i\theta}\right)^2\right|^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{9-6e^{i\theta}+e^{2i\theta}}}{\left|\left(3-e^{i\theta}\right)^2\right|^2}\right) = \frac{9-6\cos(\theta)+\cos(2\theta)}{\left|\left(3-e^{i\theta}\right)^2\right|^2}$$

étant continue sur le segment $[0, 2\pi]$, elle y atteint ses bornes et on pose $\lambda = \min\limits_{[0,2\pi]} \psi$. En outre, puisque $|-6\cos(\theta) + \cos(2\theta)| \leqslant 7 < 9$, on est assuré que ψ ne s'annule pas donc $\lambda > 0$ et on en déduit que :

$$\left|\frac{h^{(n)}(t_0)}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{\lambda}{r^2}\right) d\theta = \frac{1}{r^n}\exp\left(-\frac{\lambda}{r^2}\right).$$

(e) Une étude rapide de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant xe^{-x} \leqslant e^{-1}$ donc :

$$x^\alpha e^{-\beta x} = \left(xe^{-\beta x/\alpha}\right)^\alpha \underset{t=\beta x/\alpha \geqslant 0}{\leqslant} \left(\frac{\alpha}{\beta} te^{-t}\right)^\alpha \leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta} e^{-1}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{e\beta}\right)^\alpha.$$

(f) Posons $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$ alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)} \times \frac{1}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \underset{\ln \text{ concave}}{\leqslant} \exp\left(n \times \frac{1}{n}\right) = e. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier $N \geqslant 2$, on a :

$$\frac{u_N}{u_1} = \prod_{n=1}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \prod_{n=1}^{N-1} e = e^{N-1} \Rightarrow u_N \leqslant e^{N-1} u_1 = e^{N-1},$$

cette formule étant évidemment vraie pour $n = 1$.

(g) Soit $t_0 \in \left]0, T\right]$, d'après la question 4.4.d), il existe λ (indépendant de t_0) tel que :

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}, \left|h^{(n)}(t_0)\right| \leqslant \frac{n!}{r^n} \exp\left(-\frac{\lambda}{r^2}\right) = n! \left(\frac{1}{r^2}\right)^{n/2} \exp\left(-\lambda \left(\frac{1}{r^2}\right)\right) \underset{4.4.\text{e}}{\leqslant} n! \left(\frac{n/2}{e\lambda}\right)^{n/2} \\ &= \frac{n!}{\left(\sqrt{2e\lambda}\right)^n} \sqrt{n^n} \underset{4.4.\text{f}}{\leqslant} \frac{n!}{\left(\sqrt{2e\lambda}\right)^n} \sqrt{e^{n-1} n!} = \frac{e^{-1/2} (n!)^{3/2}}{\left(\sqrt{2\lambda}\right)^n}. \end{aligned}$$

Cette inégalité restant vraie pour $t_0 = 0$ car , d'après la question 4.1, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad h^{(n)}(0) = 0$ d'où $h \in \mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$.

5. Puisque $h \in \mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$, la fonction $g : t \mapsto h(T - t)$ appartient aussi à $\mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$ donc $g + h$ appartient à $\mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$ (car c'est un espace vectoriel). Puisque $g + h$ ne s'annule pas sur $[0, T]$ (chaque fonction est positive sur cet intervalle et elles ne s'annulent pas simultanément) et qu'elle est continue sur ce segment, on est assuré de l'existence de $\delta = \min\limits_{[0,T]} (g + h) > 0$. On a alors $g + h \geqslant \delta$ sur $[0, T]$ donc, d'après la question 4.5.c, on a $\dfrac{1}{g + h} \in \mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$. En utilisant la question 4.4, on peut affirmer que $g \times \dfrac{1}{g + h} = \dfrac{g}{g + h} = \phi \in \mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$.

6. Puisque $P \in \mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$ (question 4.2) et ϕ aussi, on en déduit que $P\phi \in \mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$ (question 4.4).

7. En utilisant les notations de la question 5.5 ainsi que la question 5.1, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}) &: \phi(g + h) = g \\ \forall n &\in \mathbb{N}, h^{(n)}(0) = 0, \ g^{(n)}(T) = (-1)^n h^{(n)}(0) = 0, \\ (g + h)^{(n)}(0) &= (-1)^n h^{(n)}(T), \ (g + h)^{(n)}(T) = h^{(n)}(T) \end{aligned}$$

En dérivant n fois la relation $(\mathcal{R})$ et en l'évaluant en T, on obtient pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)}(T) h^{(n-k)}(T) = 0 \Leftrightarrow \phi^{(n)}(T) h(T) = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \phi^{(k)}(T) h^{(n-k)}(T)$$

Puisque $\phi(T) = 0$ et que $h(T) \neq 0$, une récurrence immédiate prouve que $\phi^{(n)}(T) = 0$ pour tout entier n donc, toujours pour tout entier n,

$$(P\phi)^{(n)}(T) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)}(T) P^{(n-k)}(T) = 0.$$

On remarque ensuite que :

$$(\mathcal{R}') : (1 - \phi)(g + h) = h$$

En dérivant n fois la relation $(\mathcal{R}')$ et en l'évaluant en 0, on obtient pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-\phi)^{(k)}(0)(-1)^{n-k} h^{(n-k)}(T) = 0 \Leftrightarrow (1-\phi)^{(n)}(0)\, h(T) = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (1-\phi)^{(k)}(0)\, h^{(n-k)}(T)$$

Puisque $(1-\phi)(0) = 0$ et que $h(T) \neq 0$, une récurrence immédiate prouve que $(1-\phi)^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n. Ainsi, on vient d'établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi^{(n)}(0) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \geqslant 1 \end{array} \right. \Rightarrow (P\phi)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)}(0)\, P^{(n-k)}(0) = \phi(0)\, P^{(n)}(0) = P^{(n)}(0).$$

5 Équation de la chaleur

1. Il existe $M, R > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0,T], \quad \left| f^{(n)}(t) \right| \leqslant \frac{M(n!)^s}{R^n} \Rightarrow \left| f^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \leqslant \frac{M(n!)^s}{R^n} \times \frac{1^{2n}}{(2n)!} = \frac{M(n!)^s}{R^n(2n)!}.$$

On pose pour tout entier n, $u_n = \dfrac{M(n!)^s}{R^n(2n)!}$ alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^s}{R(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^s}{4Rn^2} = \frac{1}{4Rn^{2-s}} \underset{n\to+\infty}{\overset{2-s>0}{\to}} 0.$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ce qui prouve la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ d'où la bonne définition de $H(t,x)$ pour tout $(t,x) \in [0,T]\times[0,1]$.

2. Pour tout entier n, posons $H_n : (t,x) \mapsto f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $[0,T]\times[0,1]$.
Pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et tout couple $(t,x) \in [0,T]\times[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{p+q} H_n}{\partial x^p \partial t^q}(t,x) \right| &= \left| f^{(n+q)}(t) \frac{(2n)(2n-1)\cdots(2n-q+1)}{(2n)!} x^{2n-p} \right| \\ &\leqslant \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } p > 2n \\ \dfrac{M((n+q)!)^s}{R^{n+q}} \times \dfrac{(2n)(2n-1)\cdots(2n-q+1)}{(2n)!} & \text{si } p \leqslant 2n \end{array} \right. = u_n^{(p,q)} \end{aligned}$$

donc $\sup\limits_{(t,x)\in[0,T]} \left| \dfrac{\partial^{p+q} H}{\partial x^p \partial t^q}(t,x) \right| \leqslant u_n^{(p,q)}$. Pour tout $n \geqslant \dfrac{p}{2}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}^{(p,q)}}{u_n^{(p,q)}} = \frac{(n+q+1)^s}{R(2n+2)(2n+1)} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n-q+3)(2n-q+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^s}{4Rn^2} = \frac{1}{4Rn^{2-s}} \underset{n\to+\infty}{\overset{2-s>0}{\to}} 0.$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant p/2} u_n^{(p,q)}$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^{(p,q)}$ aussi. Ainsi, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\partial^{p+q} H_n}{\partial x^p \partial t^q}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,T]\times[0,1]$ ce qui démontre que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} H_n = H$ est de classe C^∞ sur $[0,T]\times[0,1]$ d'où l'existence et la continuité de toutes ses dérivées partielles sur $[0,T]\times[0,1]$.

3. D'après la question précédente, on a pour tout $(t,x) \in [0,T]\times[0,1]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(t,x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial H_n}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n+1)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(t,x)}_{=0 \text{ si } n=0} = \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} f^{(k+1)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=0$ sur $[0,T]\times[0,1]$. En outre, pour tout $t\in[0,T]$, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t,0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{\partial H_n}{\partial x}}_{=0 \text{ si } n=0}(t,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}f^{(n)}(t)\underbrace{\frac{0^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{=0 \text{ car } 2n-1>0}=0.$$

4. Le polynôme H^0 étant pair, il existe un entier N et des réels $(c_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ tels que $H^0=\sum_{n=0}^{N}c_nX^{2n}$. On pose $P=\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)!}{n!}c_nX^n\in\mathbb{R}[X]$ alors, d'après la formule de Taylor, on a :

$$\forall n\in\{0,...,N\},\ \frac{P^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(2n)!}{n!}c_n\Leftrightarrow\frac{P^{(n)}(0)}{(2n)!}=c_n,\ \forall n>N,\ \frac{P^{(n)}(0)}{n!}=0\Leftrightarrow\frac{P^{(n)}(0)}{(2n)!}=0$$

Soit ϕ la fonction définie par la partie 4 et $f=P\phi$. Puisque $\phi\in\mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0,T)$ (question 4.5), alors $f\in\mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0,T)$ (question 3.2 et 3.4). D'après la question précédente, la fonction $H:(t,x)\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ vérifie les deux premières équations proposées. En outre, on a :

$$\forall x\in[0,1],\ H(0,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f^{(n)}(0)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\underset{4.7}{\overset{\text{question}}{=}}\sum_{n=0}^{+\infty}P^{(n)}(0)\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{N}c_nx^{2n}=H^0(x)$$
$$\forall x\in[0,1],\ H(T,x)=0=\sum_{n=0}^{+\infty}f^{(n)}(T)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\underset{4.7}{\overset{\text{question}}{=}}\sum_{n=0}^{+\infty}0\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0.$$

Pour finir, on pose $u:t\mapsto\frac{\partial H}{\partial x}(t,1)$ qui est continue sur $[0,T]$ donc $\forall t\in[0,T]$, $\frac{\partial H}{\partial x}(t,1)=u(t)$, ce qui permet de conclure.