ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2016 FILIÈRE **MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

On note

- $\mathbb{R}_N[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré $\leqslant N$,
- $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ pour tout $x = (x_1, ..., x_n)\,, y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels,
- I_n son élément unité,
- exp l'exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,,$
- $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de la fonction f, pour $k \geqslant 1$, lorsque I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est k-fois dérivable sur I; par convention $f^{(0)} = f$,
- $C^m([0,T],\mathbb{R})$, pour $m \geqslant 1$, l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[0,T]$, de classe C^m sur l'intervalle ouvert $]0,T[$, admettant des dérivées à droite en 0, et à gauche en T, jusqu'à l'ordre m et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur $[0,T]$ pour $k = 1, ..., m$,
- $C^\infty([0,T],\mathbb{R}) := \cap_{m\in\mathbb{N}} C^m([0,T],\mathbb{R})$,
- $\binom{n}{k}$ les coefficients binomiaux: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,, \forall n \in \mathbb{N}^*\,, k \in \{0, ..., n\}\,.$

Les relations entre les 5 parties sont:

$$1 \Rightarrow 2 \qquad\qquad 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5\,.$$

Ainsi, la partie 1 est utile pour résoudre la partie 2 mais les parties (3, 4, 5) sont indépendantes des parties (1, 2), etc.

1 Équation différentielle scalaire

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$, $a_0, ..., a_{n-1}, c_0, ..., c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Proposition 1 *Il existe $u \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ tel que la solution f du système*

$$(\Sigma) : \begin{cases} f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 f(t) = u(t)\,, \quad \forall t \in [0,T]\,, \\ f^{(k)}(0) = c_k \text{ pour } k = 0, ..., n-1\,, \end{cases}$$

vérifie $f^{(k)}(T) = 0$ pour $k = 0, ..., n-1$.

1. Justifier, pour tout $u \in C^0([0,T],\mathbb{R})$, l'existence et l'unicité de $f \in C^n([0,T],\mathbb{R})$ vérifiant (Σ).
2. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\left| \begin{array}{llll} L : & \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^{2n} \\ & P & \mapsto & \Big(P(0), ..., P^{(n-1)}(0), P(T), ..., P^{(n-1)}(T)\Big)\,. \end{array} \right.$$

3. Montrer qu'il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(0) = c_k$ et $f^{(k)}(T) = 0$ pour $k = 0, ..., n-1$.
4. Montrer la Proposition 1.
5. La fonction u évoquée dans la Proposition 1 est-elle unique?

2 Système différentiel

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Le but de cette partie est de montrer l'équivalence entre les énoncés suivants.

- **(E1):** $(b, Ab, ..., A^{n-1}b)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- **(E2):** Pour tout $y^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ tel que la solution de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + u(t)b\,, \quad \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y^0\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

  vérifie $y(T) = 0$

1. Justifier, pour tout $u \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ et tout $y^0 \in \mathbb{R}^n$, l'existence et l'unicité de $y \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ vérifiant (2.1).

2. Exprimer $y(T)$ en fonction de A, b, u et y^0. En déduire une reformulation de l'égalité $y(T) = 0$ de la forme $y^0 = \Phi(A, b, u)$.

3. Montrer que, pour tout $k \geqslant n$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.

4. Le but de cette question est de démontrer **(E2)** $\Rightarrow$ **(E1)**. On suppose que $(b, Ab, ..., A^{n-1}b)$ **n'est pas** une base de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Justifier l'existence de $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\langle z, A^k b\rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Que dire de $\langle z, \exp(At)b\rangle$ pour $t \in \mathbb{R}$?

   (c) Soit $y^0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle z, y^0\rangle \neq 0$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $u \in C^0([0, T], \mathbb{R})$ pour laquelle la solution de (2.1) vérifie $y(T) = 0$.

   (d) Conclure.

Jusqu'à la fin de la partie 2, notre but est de démontrer **(E1)** $\Rightarrow$ **(E2)**. On suppose donc que **(E1)** est vérifié. On note $a_0, ..., a_{n-1}$ les coefficients du polynôme caractéristique de A:

$$\det(XI_n - A) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$$

et on définit une famille $(v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par récurrence descendante, de la façon suivante

$$\begin{cases} v_n := b \\ v_k := Av_{k+1} + a_k v_n \qquad \text{pour } k = n-1, n-2, ..., 1\,. \end{cases}$$

5. Exprimer v_k en fonction de A et b pour $k = 1, ..., n$.

6. Montrer que $A^j b \in \mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_n\}$ pour $j = 0, ..., n-1$. En déduire que $(v_1, ..., v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

7. Montrer que $Av_1 = -a_0 v_n$

8. En déduire l'existence de $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\widetilde{A} := U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. Soit $y^0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ et y la solution de (2.1).
   (a) Quel problème de Cauchy la fonction
   $$\left| \begin{array}{lccc} F: & [0,T] & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & U^{-1}y(t) \end{array} \right.$$
   résout-elle?
   (b) Notons $f(t)$ la première composante de $F(t)$. Quel problème de Cauchy la fonction f résout-elle?
10. Conclure.

3 Classe de Gevrey: résultats généraux

Dans cette partie, on fixe $s \in [1,\infty[$ et $T > 0$.

Définition: Une fonction $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ est dans la **classe de Gevrey d'ordre s sur** $[0,T]$ si $f \in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$ et s'il existe $M, R > 0$ tels que
$$|f^{(n)}(t)| \leqslant \frac{M(n!)^s}{R^n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, t \in [0,T]\,.$$
On note alors $f \in \mathcal{G}^s(0,T)$.

1. Montrer que, si $f \in \mathcal{G}^s(0,T)$ alors la fonction
   $$\left| \begin{array}{lccc} g: & [0,T] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(T-t) \end{array} \right.$$
   est dans la classe de Gevrey d'ordre s sur $[0,T]$.
2. Montrer que $\mathcal{G}^s(0,T)$ contient les fonctions polynomiales.
3. Montrer que $\mathcal{G}^s(0,T)$ est un espace vectoriel.
4. Montrer que si $f_1\,, f_2 \in \mathcal{G}^s(0,T)$ alors leur produit $f_1 f_2$ est dans la classe de Gevrey d'ordre s sur $[0,T]$.
5. Soit $f \in \mathcal{G}^s(0,T)$ et M, R des constantes associées comme dans la définition ci-dessus. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(t) \geqslant \delta$ pour tout $t \in [0,T]$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = -\frac{1}{f} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \left(\frac{1}{f}\right)^{(n-k)}$.
   (b) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^{1-s} \epsilon^k \leqslant \frac{\delta}{M}\,.$$
   (c) Montrer que $\frac{1}{f} \in \mathcal{G}^s(0,T)$ avec, par exemple, les constantes $M' = \frac{1}{\delta}$ et $R' = \epsilon R$.

4 Classe de Gevrey: exemples

On fixe $T > 0$. Le but de cette partie est de montrer que les fonctions h et $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ définies par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0\,, \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t \in]0,T]\,, \end{cases} \qquad \phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0\,, \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{(T-t)^2}}}{e^{-\frac{1}{(T-t)^2}} + e^{-\frac{1}{t^2}}} & \text{si } t \in]0,T[\,, \\ 0 & \text{si } t = T\,, \end{cases}$$

sont dans la classe de Gevrey d'ordre $\frac{3}{2}$ sur $[0,T]$.

1. Montrer que $h^{(k)}(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $h \in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que la série entière $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $\rho > 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, on note $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Montrer que, pour tout $r \in]0,\rho[$, on a
$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^n} d\theta\,.$$
4. Dans cette question, on fixe $t_0 \in]0,T]$ et $r := \frac{t_0}{3}$.
   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{t_0\}$, on a
   $$e^{-\frac{1}{(t_0-z)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, t_0^{2n}} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{t_0}\right)^{2n}}\,.$$
   (b) En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que $e^{-\frac{1}{(t_0-z)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < t_0$.
   (c) Montrer que
   $$\left| \frac{h^{(n)}(t_0)}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{1}{(t_0 - re^{i\theta})^2}}}{(re^{i\theta})^n} d\theta \right|\,.$$
   (d) Montrer que, pour un certain $\lambda > 0$ indépendant de t_0, on a
   $$|h^{(n)}(t_0)| \leqslant n! \frac{e^{-\frac{\lambda}{r^2}}}{r^n}\,.$$

(e) Montrer que, pour tout $\alpha, \beta, x > 0$ alors $x^\alpha e^{-\beta x} \leqslant \left(\frac{\alpha}{e\beta}\right)^\alpha$.

(f) Montrer que $n^n \leqslant e^{n-1} n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) En déduire que $h \in \mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$.

5. Montrer que $\phi \in \mathcal{G}^{\frac{3}{2}}(0, T)$.

6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la fonction $t \mapsto P(t)\phi(t)$ est dans la classe de Gevrey d'ordre $\frac{3}{2}$ sur $[0, T]$

7. Calculer $\phi^{(n)}(0)$, $\phi^{(n)}(T)$, $(P\phi)^{(n)}(0)$ et $(P\phi)^{(n)}(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 Équation de la chaleur

Dans cette partie, on fixe $s \in [1, 2[$, $T > 0$ et une fonction $f \in \mathcal{G}^s(0, T)$.

1. Montrer que
$$H(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
est bien défini, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$.

2. Montrer que toutes les dérivées partielles de H sont définies et continues sur $[0, T] \times [0, 1]$.

3. Montrer que $\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$ sur $[0, T] \times [0, 1]$ et que $\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

4. En déduire que, pour tout polynôme pair H^0, il existe une fonction $u \in C^0([0, T], \mathbb{R})$ et une solution H du système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}(t, x) - \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t, x) = 0\,, & \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ \dfrac{\partial H}{\partial x}(t, 0) = 0\,, & \forall t \in [0, T]\,, \\ \dfrac{\partial H}{\partial x}(t, 1) = u(t)\,, & \forall t \in [0, T]\,, \\ H(0, x) = H^0(x)\,, & \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$
qui satisfasse $H(T, x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.