

**Composition de Mathématiques B, Filière MP
(X)**

Rapport de MM. Hakim BOUMAZA, Bruno DUCHESNE et François VIGNERON, correcteurs.

Présentation du sujet

Cette épreuve concernait un problème d'analyse sur le groupe de Heisenberg. Il s'agissait d'étudier les chemins de Carnot sur le groupe de Heisenberg. Ces chemins sont définis par une équation différentielle linéaire du premier ordre. Le groupe de Heisenberg (le groupe \mathbf{H} de l'énoncé) est un groupe de matrices non-commutatif mais, parmi les groupes non-commutatifs, il est très proche d'un groupe commutatif puisque son groupe dérivé (sous-groupe engendré par les $[A, B]$ pour $A, B \in \mathbf{H}$) est égal à son centre. On dit que ce groupe est nilpotent d'ordre 1.

La première partie visait à établir un isomorphe de groupes entre \mathbf{H} et son algèbre de Lie \mathbf{L} . Pour cela, on munissait \mathbf{L} d'une nouvelle loi de groupe $*$. L'isomorphisme était alors réalisé par l'application exponentielle.

Dans la seconde partie (qu'il était inutile d'avoir traitée pour traiter la troisième partie), les groupes de questions 6-7 et 8-9-10 étaient indépendants l'un de l'autre. En 6-7, on montrait un résultat de morphisme de groupes entre \mathbf{H} et les groupes des matrices dont l'algèbre de Lie est un quotient de \mathbf{L} . En 8-10, on montrait la formule de Trotter-Kato (question 10) pour deux matrices de même taille.

La dernière partie démontrait l'existence et l'unicité des chemins de Carnot puis s'intéressait aux propriétés de leurs extrémités, en particulier le fait que ces extrémités constituent une surface de révolution. Le sujet se concluait sur l'accessibilité de n'importe quel point du groupe en ne suivant que des Chemins de Carnot. Cette propriété est remarquable puisqu'on peut ainsi connecter deux points quelconques d'un espace tridimensionnel en n'utilisant que deux paramètres de contrôle. Elle place le groupe de Heisenberg au coeur des applications : par exemple, faire un créneau avec une voiture (modélisée par une position dans \mathbb{R}^2 et l'angle des roues, et en contrôlant seulement la direction et la vitesse) s'apparente à calculer un chemin de Carnot dans le groupe de Heisenberg.

Quelques statistiques et indications sur le barème

En traitant toutes les questions correctement jusqu'à la 7b incluse on obtenait plus de 10 points. En traitant toutes les questions des deux parties, on obtenait plus de 16 points. Les meilleurs candidats ont traité quasiment toutes les questions jusqu'à la question 15. Une dizaine de candidats ont atteint la note maximale de 20.

| | | |
|-------------------------|------|---------|
| $0 \leq N < 4$ | 246 | 16,68 % |
| $4 \leq N < 8$ | 620 | 42,03 % |
| $8 \leq N < 12$ | 413 | 28,00 % |
| $12 \leq N < 16$ | 167 | 11,32 % |
| $16 \leq N \leq 20$ | 29 | 1,97 % |
| Total | 1475 | 100 % |
| Nombre de copies : 1475 | | |
| Note moyenne : 7,55 | | |
| Ecart-type : 3,73 | | |

On observe que les notes comprises entre 5 et 10 représentent la moitié de l'ensemble des copies. Les 400 meilleures copies sont les copies qui ont obtenu plus de 10. Ce nombre de 400 correspond à l'ordre de grandeur du nombre d'admissibles. Le barème a été conçu pour séparer les candidats dans la zone d'admissibilité et éviter les effets de seuil.

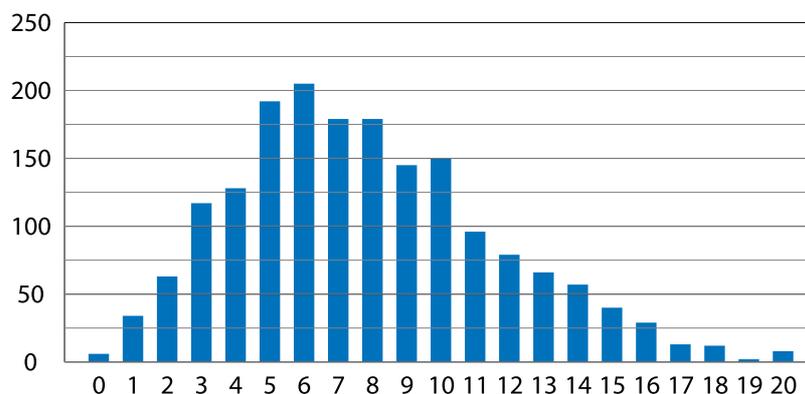


Figure 1 - Répartition des notes : en abscisse la note et en ordonnée le nombre de candidats ayant obtenu cette note.

Commentaires généraux

Comme c'est souvent le cas, le sujet était long et constitué de questions de niveaux différents. On retrouvait un nombre important de questions de niveau accessible à tout candidat sérieux et qui permettaient en les traitant d'obtenir une bonne note. On remarquera qu'une grande partie de l'épreuve ne demandait pas une connaissance très précise du cours (peu de théorèmes à invoquer) mais faisait plutôt appel à une maîtrise de techniques classiques.

Une grande partie des questions demandait de démontrer une formule donnée dans l'énoncé. Dans une question de ce type, il est important de mener un calcul concis, précis et argumenté. Des tentatives *d'extorsion de points* (comme commencer un calcul, laisser un trou dans le raisonnement et écrire le résultat final ; cacher son incapacité par de longs calculs qui se concluent miraculeusement par le bon résultat ; écrire quelque chose comme « après simplifications » ou encore affirmer que deux termes sont égaux alors que visiblement ils ne le sont pas,...) ne peuvent donner les points. Il est par ailleurs inutile d'écrire une phrase du type : « d'après des calculs effectués au brouillon » et de conclure immédiatement au résultat. Là encore, aucun point n'est accordé.

De même, invoquer « des théorèmes généraux » n'apporte rien à la réponse qui doit être précise. De plus, les correcteurs sont par la suite bien plus suspicieux et n'accorderont pas le bénéfice du doute.

D'une manière générale, on retiendra que les correcteurs sont particulièrement attentifs au fait que les calculs sont bel et bien menés et justifiés, en particulier dans une épreuve comme celle-ci où de nombreuses questions des deux premières parties admettent une réponse purement calculatoire.

A plusieurs reprises (Questions 2a, 5 et 7b), il était demandé de démontrer qu'un certain objet est un groupe. Un grand flou régnait sur certaines copies. On rappelle qu'un groupe est un ensemble non-vide muni d'une loi de composition interne associative, avec un élément neutre et tel que tout élément possède un inverse (à droite et à gauche). Il est important de vérifier tous ces points, en particulier l'associativité pour la question 2a. Il est souvent plus rapide de vérifier qu'il s'agit d'un sous-groupe d'un groupe connu, la vérification de l'associativité est alors superflue. Par contre, comme en 2a, s'il n'y a pas de groupe connu « plus gros », il n'existe aucun raccourci.

L'essentiel du sujet reposait sur des questions autour de la non-commutativité et il était important d'avoir en tête que certains faits bien connus pour les nombres réels ne sont plus vrais pour des matrices en général. Par exemple, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ n'est pas nécessairement vrai, de même que l'identité remarquable concernant $A^n - B^n$ ou l'expression des solutions sous formes d'exponentielles pour les équations linéaires du premier ordre.

Certains s'arrêtent au milieu d'une question, sous prétexte qu'ils n'ont plus de temps mais produisent encore 3 copies après, où ils souffrent clairement d'avoir sauté les questions précédentes. Cette stratégie (consacrer un temps strictement limité par question) est vouée à l'échec. Il est préférable de passer du temps à approfondir une question, car un point difficile à comprendre peut être la clef de toute une série de questions (par exemple, l'associativité à la Question 2a donne la clef de toute la première partie). Passer une question est un pari : celui qu'on saura faire deux fois mieux après (une fois pour rattraper la question sautée et une fois pour gagner réellement des points). Sachant que les sujets sont construits en progression et que les réponses aident à comprendre les questions suivantes, sauter une question est un pari désespéré contre le bon sens...

Inversement, lorsque le sujet contient des parties indépendantes, il en est fait mention explicitement : le sujet de cette année indiquait que la partie II était largement indépendante du reste ce qui donnait l'opportunité aux candidats blasés par l'algèbre de la partie I de se consacrer rapidement à l'analyse de la partie III. Un candidat qui aurait ainsi traité parfaitement l'intégralité de la partie I et les questions III-11 à III-13 aurait obtenu 11.3/20, ce qui lui aurait donné une chance sérieuse d'être admissible.

Dans tous les cas, le grappillage des questions faciles ne creuse aucun écart avec la masse des candidats et constitue donc une perte de temps pure et simple.

Examen détaillé des questions

Première partie

Question 1 Cette question d'entrée dans l'épreuve est élémentaire (plus de 90% des candidats l'ont réussie) une fois remarqué que $M_{p,q,r}^3 = 0$. Quelques candidats ont oublié les coefficients dans la série qui définit l'exponentielle.

Question 2a Le point le plus délicat pour cette question est la vérification de l'associativité. Ce point a piégé des nombreux candidats puisque seuls 36% d'entre eux ont réussi cette question. L'associativité ne découle pas simplement de l'associativité de la somme et du produit de matrices. La manière la plus simple de montrer cette associativité consiste à remarquer que pour tout $(M, N, P) \in L^3$, $MNP = 0$. On peut bien sûr calculer les coefficients des matrices $(M * N) * P$ et $M * (N * P)$. Les correcteurs ont été choqués de lire dans plusieurs copies que ce calcul est « une méthode théoriquement possible mais complètement hors d'atteinte » comme si le candidat espérait réussir un concours de haut niveau sans faire d'efforts ! A ces candidats, nous répondrons que des centaines d'autres ont effectivement fait ce calcul dans le temps imparti.

Question 2b Cette question a été réussie par 80% des candidats et ne pose pas de problème particulier.

Question 3 et 4 Pour ces deux questions, il est important d'avoir en tête que l'on n'a pas nécessairement $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$. Pour que cette égalité soit vraie, il suffit que M et N commutent. L'utilisation du fait que, pour tout $(M, N, P) \in L^3$, $MNP = 0$, permet de conclure rapidement, sinon on peut calculer les coefficients des matrices. Pour la Question 4, on peut aussi utiliser le résultat de la Question 3 et le fait que $M * N$ commute avec $(-M) * (-N)$. D'une façon générale, les formules de ces deux questions sont fausses dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc toute preuve nécessite d'utiliser la spécificité de la structure de \mathbf{L} .

Question 5 Pour montrer que \mathbf{H} est un groupe, il suffit de vérifier que c'est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$. Pour cela, on peut utiliser que l'image d'un groupe par un morphisme en est encore un, mais rare sont les candidats qui invoquent ce résultat. Pour montrer qu'une application est un morphisme de groupes, il est inutile de vérifier que l'image de l'élément neutre est l'élément neutre du groupe d'arrivée ni que l'image de l'inverse est l'inverse de

l'image. La connaissance du cours et des définitions de base de l'algèbre est donc assez incertaine chez de nombreux candidats. Certains candidats ne savent pas ce qu'est un isomorphisme et pensent qu'il faut montrer que tout élément de l'image est inversible... Enfin, il s'agissait de morphisme de groupes et on ne pouvait donc pas utiliser d'argument de dimension pour affirmer que l'injectivité implique la surjectivité ou vice-versa.

Deuxième partie

Question 6a Cette question est la première qui demande au candidat de faire preuve d'initiative. Seuls 10% des candidats ont réussi cette question et même parmi les bonnes voire très bonnes copies, la question n'a que peu souvent été traitée correctement. Une méthode pour montrer ce résultat consiste à montrer par récurrence la relation

$$[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B].$$

Question 6b Il faut de nouveau faire attention à la non-commutativité entre A et B . L'équation différentielle la plus simple à obtenir est

$$f'(t) = Af(t) + f(t)B$$

qui découle simplement de la dérivation d'un produit et de l'exponentielle en observant que B commute avec $\exp(tB)$. Cette équation ne permet pas de répondre à la question suivante mais les points ont été accordés à cette réponse simple. Pour pouvoir répondre à la question suivante, il faut utiliser la relation obtenue en 6a et en déduire que la fonction en question est solution de l'équation différentielle $f'(t) = (A + B + t[A, B])f(t)$.

Question 6c L'équation $f'(t) = (A + B + t[A, B])f(t)$ est une équation homogène linéaire du premier ordre à coefficients non constants. On pouvait deviner la solution de l'équation au vu du résultat donné dans l'énoncé. En posant ainsi $f(t) = \exp(\varphi(t))$ avec $\varphi(t) = t(A + B) + \frac{t^2}{2}[A, B]$ on obtient une solution et l'unicité de la solution à condition initiale fixée permet alors de conclure. Appliquer sans réfléchir la formule classique pour les équations différentielles numériques à coefficients constants n'était pas acceptable et a conduit de nombreux candidats à essayer de maquiller leurs calculs pour retrouver le facteur $1/2$. Attention aussi que si $[A, B]$ n'avait pas commuté avec $A + B$, alors $\varphi(t)$ n'aurait eu aucune raison d'être une primitive du coefficient matriciel de l'équation. Pourtant, nombreux sont ceux qui font semblant d'appliquer ce « théorème » alors qu'il n'est valable que dans le cas des équations différentielles numériques.

Question 7a Pour réussir cette question, le plus simple est de montrer par un calcul élémentaire que $[M, N]$ est dans la droite vectorielle engendrée par $[A, B]$ et qu'ainsi tout élément de \mathcal{L} commute avec $[M, N]$. Un nombre non négligeable de candidats ne semblent pas avoir remarqué que pour deux matrices A, B de mêmes tailles, A et B commutent si et seulement si $[A, B] = 0$.

Question 7b Pour montrer que (G, \times) est un groupe, il est bien entendu plus simple de vérifier que c'est un sous-groupe de $GL_d(\mathbb{R})$ et alors la vérification de l'associativité est superflue. Attention par contre à ne pas affirmer que $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est un groupe, même si

effectivement, le produit y est associatif... Des candidats ont commencé leur réponse par la remarque judicieuse que la réponse à la Question 5 permet d'affirmer que Φ est bien définie. La vérification de la propriété de morphisme fait alors appel à la question 3 et aux questions 6c/7a.

Question 8a La première partie de cette question est élémentaire et on peut y répondre en remarquant simplement que $\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n \times \dots \times (n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n}$ qui est un produit de k termes tous compris entre 0 et 1 et tous tendant vers 1. On peut aussi utiliser la formule de Stirling à condition de manipuler ensuite correctement les équivalents, ce qui n'a pas toujours été le cas. Certains candidats ont voulu conclure en utilisant un critère de suite croissante majorée sans réussir à justifier la croissance (qui a bien lieu à partir d'un certain rang).

La seconde partie de la question est un peu plus difficile. En utilisant que $\| \cdot \|$ est une norme d'algèbre et l'hypothèse $\|D_n\| \leq \lambda$, on obtient la majoration

$$\left\| \left(I_d + \frac{D_n}{n} \right)^n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (D_n)^k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \right) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Il ne suffit pas de dire $\left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \right) \rightarrow 0$ pour conclure. En utilisant la convergence de la série $\sum \frac{\lambda^k}{k!}$, on peut couper la somme de droite en deux et utiliser séparément $\left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \right) \rightarrow 0$ et le fait que le reste de la série $\sum \frac{\lambda^k}{k!}$ tend vers 0. On peut aussi utiliser un argument de convergence dominée mais il faut alors se ramener à une suite de séries $\sum_k a_{n,k}$ avec $a_{n,k} = \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \right) \frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \leq n$ et $a_{n,k} = 0$ pour $k > n$.

Les correcteurs constatent que l'absence de maîtrise de ces techniques classiques d'analyse et de raisonnement est très fortement corrélée à l'échec global du candidat et constitue donc un indicateur fiable du sérieux de sa préparation.

Question 8b Pour cette question, il ne fallait pas oublier que D_n et D ne commutent pas nécessairement et donc qu'on ne pouvait pas utiliser la formule vraie dans les anneaux commutatifs $a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$. On peut montrer le résultat par récurrence ou observer que

$$A^n - B^n = \sum_{i=0}^{n-1} A^i (A - B) B^{n-1-i}$$

est valide même si A et B ne commutent pas.

Question 8c Une question de synthèse qui découle des questions 8a et 8b.

Question 9a Cette question a été bien traitée par plus de la moitié des candidats.

Question 9b La première erreur pour cette question est de vouloir utiliser la formule de la question 6c qui n'est plus valide ici puisque les matrices A et B ne commutent pas avec $[A, B]$. On peut utiliser la question 9a pour avoir un développement limité de $\exp\left(\frac{A}{n}\right)$ et $\exp\left(\frac{B}{n}\right)$ et ensuite il suffit de faire le produit de ces deux développements. Parmi les candidats qui ont traité cette question, nombre d'entre eux ont oublié des termes en développant ce produit.

Question 10 Pour cette dernière question de la seconde partie, il suffit de combiner la Question 9b avec la Question 8c en posant $D_n = A + B + nC_n$. Certains candidats qui avaient pourtant réussi les questions précédentes ont voulu démontrer ce résultat sans les utiliser et ont usé d'arguments non justifiés ; c'est dommage.

Troisième partie

Question 11a La troisième partie commence avec une question qui est presque du cours. C'est bien entendu le théorème de Cauchy-Lipschitz qui donne l'existence et l'unicité d'une solution locale. Cependant, si l'on n'avait pas remarqué que cette équation est linéaire, on ne pouvait pas justifier (seulement avec le théorème de Cauchy-Lipschitz) l'existence de la solution sur l'intervalle $[0, T]$ en entier. Beaucoup trop de candidats ne pensent qu'à l'unicité dans l'expression « montrer qu'il existe un unique... » ; pourtant, l'aspect « existence » est tout aussi essentiel !

Question 11b De nouveau, les candidats ayant oubliés l'absence de commutativité ont voulu utiliser une formule exponentielle qui n'est pas valable ici et ne débouchait pas sur une solution. Une méthode simple et efficace consiste à chercher les coefficients de la matrice $\gamma(t)$ en résolvant un système de neuf équations. Pour chercher une solution sous la forme $\exp(M_{p(t),q(t),r(t)})$ il fallait au préalable montrer que $\gamma(t) \in \mathbf{H}$ pour $t \in [0, T]$, par exemple en observant que $\gamma(t) - I_3 = \int_0^t \gamma'(\tau) d\tau \in \mathbf{L}$ ou en résolvant l'équation différentielle pour les coefficients inférieurs.

Question 12a et 12b On peut appliquer les formules de la Question 11 pour réussir celle-ci. On peut aussi résoudre directement l'équation différentielle. L'expression de $r(t)$ de l'énoncé nécessite d'utiliser une formule de trigonométrie.

Question 13 Le prolongement par continuité de f et g est facile et de nombreux candidats sont venus grappiller ici quelques dixièmes de points sans avoir nécessairement traité les questions précédentes. Pour justifier les propriétés suivantes sur f et g , il s'agit d'une étude de fonctions qui n'est pas forcément simple et rapide.

Question 14 À partir de cette question, le nombre de réponses ou de tentatives de réponses est négligeable. Le sens direct était une conséquence assez simple des questions 12a et 13 en séparant le cas $\varphi \neq 0$ de $\varphi = 0$. La réciproque était plus dure et demandait de reconnaître une paramétrisation du cercle.

Question 15 Il s'agit d'un argument de compacité.

Question 16a,b et c Ces questions plus difficiles n'ont quasiment pas été abordées. En 16a, on montre à l'aide d'une paramétrisation, que chaque parabole d'axe verticale intersecte la sphère de Carnot en un point unique. En 16b, il s'agit d'étudier l'effet d'un changement de coordonnées $(p, q, r) \mapsto (\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r)$ sur l'équation différentielle des chemins de Carnot. On démontre ainsi que tout point de l'espace est accessible par un chemin de Carnot. En 16c, on réutilise 15 pour obtenir l'ordre de grandeur du temps d'accessibilité.