

MISCELLANÉES

par David Blottière, le 5 septembre 2023 à 21h02

TD*

1

Les exercices suivants sont issus des oraux X et ÉNS de la filière MP, en 2018.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Dénombrer les listes $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ où ne figurent pas deux 1 consécutifs.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note D_n le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe.
Donner une relation entre D_{n+2} , D_{n+1} et D_n .

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 3

Soit un entier $k \geq 2$.
Existe-t-il trois entiers strictement positifs consécutifs dont le produit est la puissance k d'un entier?

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 4

Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative $*$.
Démontrer que $(G, *)$ possède un élément idempotent.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 5

Soit \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Déterminer les polynômes P de $\mathbf{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 6

Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u + v$ est inversible et $u \circ v = 0$.

□

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE 7

Minimiser l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (a, b) \longmapsto \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt. \end{array} \right.$$

□