PRODUIT SCALAIRE ET PROBABILITÉS

TD* 19

par David Blottière, le 14 février 2024 à 03h38

SOMMAIRE

§ 1. CRITÈRE DE DIAGONALISABILITÉ

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Q1. — Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Démontrer la la matrice $P^\top P$ est symétrique définie positive.

Q2. — Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = P^\top P$.

Q3. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.

i. A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

ii. Il existe $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A^\top = S^{-1} A S$.

§ 2. RAYON SPECTRAL

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. *On munit* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ *de son produit scalaire usuel et on note* $||\cdot||$ *la norme associée et :*

$$S(0,1) := \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \,:\, ||X|| = 1\right\}.$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. *On pose :*

$$|||A||| := \sup\left\{\frac{||AX||}{||X||} \,:\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}\right\} \qquad [\textit{norme d'opérateur de } A]$$

et

$$\rho(A) := \max\left\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \mathrm{Spec}\left(A^\top A\right)\right\} \qquad [\textit{rayon spectral}].$$

Q4. — Justifier que $|||A|||$ est bien définie et que :

$$|||A||| = \sup\{||AX|| \,:\, X \in S(0,1)\}.$$

Q5. — Démontrer que $|||A||| = \sqrt{\rho(A)}$.

§ 3. Critère de Sylvester

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$A^{(k)} := \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathscr{S}_k(\mathbf{R}).$$

On se propose de démontrer que :

$$(\star) \quad A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \iff \left(\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \det\left(A^{(k)}\right) > 0\right).$$

Q6. — Démontrer l'implication directe de $(\star)$.

On suppose que $A^{(n-1)} \in \mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbf{R})$ et que $\det(A) = \det\left(A^{(n)}\right) > 0$. On introduit la forme :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & X^\top A\, Y \end{array} \right.$$

qui est bilinéaire et symétrique. On note $\mathscr{B}_0 := (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et H l'hyperplan $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{n-1})$.

Q7. — Justifier que :

$$\varphi_{|\,H\times H} \left| \begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \varphi(X, Y) = X^\top A\, Y. \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur H.

Soit $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ une base orthonormée de H pour le produit scalaire $\varphi_{|\,H\times H}$.

Q8. — Démontrer que l'application :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \mathbf{R}\right) \\ X & \longmapsto & \varphi(X, \cdot) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

On note $H^\perp$ l'orthogonal de H pour φ, i.e. :

$$H^\perp := \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \,:\, \forall\, Y \in H, \quad \varphi(X, Y) = 0\right\}.$$

Q9. — Démontrer que $H^\perp$ est de dimension 1 et que $H \oplus H^\perp = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On fixe un vecteur non nul f_n de $H^\perp$ et on note $\mathscr{C}$ la base $(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Q10. — Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$\forall\, (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \varphi(X, Y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(X)^\top\ \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, \alpha)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(Y).$$

Q11. — En déduire que $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Q12. — Démontrer l'implication réciproque de $(\star)$ par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$.

Q13. — Déduire de $(\star)$ que $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

§ 4. Tirages dans une urne

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On tire les boules 2 par 2 jusqu'à ce que l'urne soit vide.

Q14. — Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche et une boule noire au i-ème tirage, où $i \in [\![1, n]\!]$.

§ 5. Temps d'arrêt

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$. On pose :

$$T := \inf\{n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\} \,:\, X_n = X_{n-1} = 1\} \qquad [\textit{temps d'arrêt}].$$

Q15. — Démontrer que T est presque sûrement fini.

Q16. — Calculer $\mathbf{P}(T = 2)$ et $\mathbf{P}(T = 3)$.

Q17. — Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$. Exprimer $\mathbf{P}(T = n+2)$ et fonction de $\mathbf{P}(T = n+1)$, et $\mathbf{P}(T = n)$.

Q18. — Démontrer que T possède une espérance et la calculer.