ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

TD*

18

par David Blottière, le 6 février 2024 à 18h57

SOMMAIRE

§ 1. UN MAJORANT DU DÉTERMINANT D'UNE MATRICE RÉELLE (ORAL MINES-PONTS)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Q1. — Démontrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} > 0$.

Q2. — Démontrer que $\det(A) \leqslant \left(\dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n}\right)^n$.

Q3. — En considérant les matrices :

$$D = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right) \qquad \text{et} \qquad B = DAD$$

démontrer que $\det(A) \leqslant a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}$.

Q4. — Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $\det(M) \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2}$.

§ 2. DÉCOMPOSITION POLAIRE

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Q5. — Démontrer que :

$$\exists (Q,S) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}), \quad A = QS.$$

§ 3. TOPOLOGIE DANS $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ ET CRITÈRE DE SYLVESTER

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Q6. — Démontrer que $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ est une partie fermée de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

Q7. — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On pose, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$A_k := (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathscr{S}_k(\mathbf{R}).$$

Démontrer que $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ si et seulement si, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\det(A_k) > 0$. Il s'agit du critère de Sylvester.

Q8. — Déduire de la question précédente que $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ est une partie ouverte de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

Q9. — Déterminer l'adhérence de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ dense $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

§ 4. MATRICES À COEFFICIENTS DIAGONAUX CONSTANTS (ORAL X)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^\top A P$ ait tous ses coefficients diagonaux constants.

§ 5. CHANGEMENT DE PRODUIT SCALAIRE (ORAL X)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Q10. — Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Démontrer la la matrice $P^\top P$ est symétrique définie positive.

Q11. — Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = P^\top P$.

Q12. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.

i. A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

ii. Il existe $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A^\top = S^{-1} A S$.

§ 6. ENDOMORPHISMES NORMAUX

Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$ (endomorphisme normal).

Q13. — Supposons que u possède une valeur propre réelle λ. Démontrer que $E_\lambda(u)$ est stable par u^* et que $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u.

Q14. — On suppose dans cette question que $\dim(E) = 2$ et que u ne possède aucune valeur propre réelle. Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{=:R(\theta)}$$

où $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, $\rho = |a + ib|$ et $\theta = \arg(a + ib)$.

Q15. — On suppose que u ne possède aucune valeur propre réelle. Démontrer qu'il existe un plan vectoriel P stable par u et u^*

Q16. — Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, des réels strictement positifs $\rho_1, \dots, \rho_r$, des réels $\theta_1, \dots, \theta_r, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \rho_1 R(\theta_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \rho_r R(\theta_r) & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$