ESPACES PRÉHILBERTIENS/EUCLIDIENS

TD* 17

par David Blottière, le 30 janvier 2024 à 20h42

SOMMAIRE

§ 1. AUTOUR DE L'INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

Soient n et k des entiers naturels non nuls fixés.

Q1. — Déterminer l'ensemble solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \dots & + & x_n & = & n^k \\ x_1^2 & + & \dots & + & x_n^2 & = & n^k \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

§ 2. UN CALCUL D'ORTHOGONAL

Soient $E := \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et l'application φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}\right.$$

On considère le sous-espace vectoriel $G := \left\{ f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbf{R}) \,:\, f'' = f \right\}$ de E.

Q2. — Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

Q3. — Déterminer une base de G.

Q4. — Démontrer que :

$$\forall\, (f,g) \in E \times G, \quad \varphi(f,g) = f(1)g'(1) - f(0)g'(0).$$

Q5. — Démontrer que $G^\perp = \left\{ f \in E \,:\, f(0) = f(1) = 0 \right\}$.

§ 3. BIJECTIVITÉ ET RÉDUCTION D'UN ENDOMORPHISME

Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien et* a, b *des vecteurs unitaires de* E*. On considère l'application :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x - \langle a, x\rangle\, b. \end{array} \right.$$

Q6. — Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective, puis exprimer f^{-1} dans ce cas.

Q7. — Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

§ 4. INÉGALITÉ DE BESSEL ET FAMILLES TOTALES

Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *un espace préhilbertien,* $||\cdot||$ *la norme sur* E *associée au produit scalaire* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$*,* $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite orthonormale de vecteurs de* E *et* $x \in E$*.*

Q8. — Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2 \leqslant ||x||^2 \qquad [\text{inégalité de Bessel}].$$

Q9. — Justifier que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n\rangle^2$ est convergente.

On suppose de plus que la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est totale, i.e. que* $\mathrm{Vect}\big((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)$ *est une partie dense de* E*.*

Q10. — Démontrer que la série vectorielle $\sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n\rangle \cdot e_n$ converge dans E et que :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle \cdot e_n.$$

Q11. — En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle^2 = ||x||^2$.

Q12. — Donner une famille orthonormale totale de l'espace $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

§ 5. CALCUL D'UN ADJOINT

Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien,* $(a, b) \in E^2$ *et l'application* f *définie par :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a, x\rangle\, b + \langle b, x\rangle\, a. \end{array} \right.$$

Déterminer l'adjoint de f.

§ 6. NOYAU ET IMAGE DE L'ADJOINT

Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien et* $u \in \mathscr{L}(E)$*.*

Q13. — Démontrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^{\perp}$ et $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$.

§ 7. Rang et composition par l'adjoint

Soient $(E, \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien et* $u \in \mathscr{L}(E)$.

Q14. — Démontrer que $\mathrm{Rg}(u^* \circ u) = \mathrm{Rg}(u) = \mathrm{Rg}(u \circ u^*)$.

§ 8. Endomorphismes antisymétriques

Soient $(E, \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien et* u *un endomorphisme de* E *tel que* $u^* = -u$ *(*u *est dit antisymétrique).*

Q15. — Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot J & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r \cdot J & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$